P1) Determine si los sig. conjuntos son numerables:

a) $A = \{\ldots, -9, -4, -1, 1, 4, 9, \ldots\}$

Dem)

- Podemos reescribir A como:

$$A = \underbrace{\{\ldots, -9, -4, -1\}}_{A_-} \cup \underbrace{\{1, 4, 9, \ldots\}}_{A_+}$$

$$\Rightarrow \quad A = A_- \cup A_+ \, /$$

Queda demostrar que A_- y A_+ son numerables, con esto A es unión de numerables. $\Rightarrow$ A es numerable

- Veamos que $A_+ = \{1, 4, 9, \ldots\}$ es numerable.

Podemos escribir $A_+ = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$
definiendo:

$$f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \longrightarrow A_+$$
$$n \longmapsto f(n) = n^2$$

Veamos que f es biyectiva:

Inyect) $f(n) = f(m) \Rightarrow n^2 = m^2 \Rightarrow n = m$

Pues $n, m > 0$

$\Rightarrow f$ es inyectiva

Sobreyectiva) Sea $m \in A_+ \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ n^2 = m$
$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ f(n) = m$
$\Leftrightarrow f$ sobreyectiva //

$\therefore f$ es biyectiva $\Rightarrow |A_+| = |\mathbb{N} \setminus \{0\}| = |\mathbb{N}|$

Para A_- es análogo, luego:

$A = A_- \cup A_+$ con A_-, A_+ numerables $\Rightarrow$ A numerable /

b) $B = \{ a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q} \}$

Podemos definir B como unión de numerables.

↳ Si: $x \in B \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{Q}, \exists b \in \mathbb{Q}, \ x = a + b\sqrt{5}$

$$\Rightarrow B = \underbrace{\bigcup_{a \in \mathbb{Q}}}_{\text{unión num.}} \ \underbrace{\bigcup_{b \in \mathbb{Q}}}_{\text{unión num.}} \underbrace{\{ a + b\sqrt{5} \}}_{|\{a+b\sqrt{5}\}| = 1 \Rightarrow \text{Cjto finito}}$$

$\Rightarrow$ B es unión numerable de finitos $\Rightarrow$ B es numerable

c) $C = \{ (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 \mid a + b + c = 5 \}$

• Probemos que C es finito y que está contenido en un numerable

↳ Podemos definir la sucesión S_n como:

$$S_0 = (5, 0, 0), \quad S_{n+1} = S_n + (0, 1, -1)$$

↳ Se cumple que $S_n \in C \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ C es infinito (pues tiene una sucesión infinita dentro)

• Por definición $C \subseteq \underbrace{\mathbb{Z}^3}_{\text{numerable}}$

Así, C es infinito + contenido en un numerable

$\Rightarrow$ C es numerable.

P2)

a) Sea $(G,*)$ una estructura asociativa, con neutro e inverso $\forall g \in G$. Sea $f: G \to G$, $f(g) = g^{-1}$

Muestre que: f es automorfismo $\Leftrightarrow (G,*)$ es conmutativa.

$\Rightarrow$) Pdq $(G,*)$ es conmutativa

Tenemos que f es morfismo

$$\Rightarrow f(g_1 * g_2) = f(g_1) * f(g_2)$$

$$\Rightarrow (g_1 * g_2)^{-1} = g_1^{-1} * g_2^{-1}$$

$*$ es asociativa + neutro

$$\Rightarrow g_2^{-1} * g_1^{-1} = g_1^{-1} * g_2^{-1}$$

Podemos tomar $x = g_1^{-1}$, $y = g_2^{-1}$, así tenemos que:

$$\Rightarrow y * x = x * y \Rightarrow (G,*) \text{ conmuta}$$

$\Leftarrow$) Pdq) f es automorfismo $\Leftrightarrow f$ morfismo + f biyectiva

• Probemos primero que f es morfismo:

$$\hookrightarrow f(g_1 * g_2) = (g_1 * g_2)^{-1}$$

asociativa + neutro

$$= g_2^{-1} * g_1^{-1}$$

$(G,*)$ conmuta

$$= g_1^{-1} * g_2^{-1}$$

$$= f(g_1) * f(g_2) \Rightarrow f \text{ es morfisma}$$

• Veamos biyect.

Inyect) Sean g_1, g_2 tq

$$f(g_1) = f(g_2) \Rightarrow g_1^{-1} = g_2^{-1} \quad / * g_1$$

$$\Rightarrow e = g_2^{-1} * g_1$$

Escaneado con CamScanner

Como $(G,*)$ conmuta

$\Rightarrow g_1 * g_2^{-1} = g_2^{-1} * g_1 = e \Rightarrow g_2^{-1}$ es el inverso de g_1

$\Rightarrow$ Como $(G,*)$ es asoc. con neutro $\Rightarrow$ el inverso es único.

$\Rightarrow \underline{g_2 = g_1}$

• Sobreyect|

↳ Sea $h \in G$, buscamos $g \in G$ tq $f(g) = h$

↳ Si tomamos $g = h^{-1}$ tenemos que:

$f(g) = g^{-1} = (h^{-1})^{-1} = h \Rightarrow f$ sobreyect

$\therefore f$ es biyect $\Rightarrow f$ es automorfismo

P2 | b)

En $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}$ se define la L.C.I como:

$$([n]_3, m) * ([i]_3, j) = ([n+i]_3, m+j)$$

Sea además $\phi: \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ un homomorfismo sobreyect. entre $(\mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}, *)$ y $(\mathbb{Z}, +)$

1) Muestre que $\phi([1]_3, 0) = 0$

Dem|

Calculemos $\phi(([1]_3,0) * ([1]_3,0) * ([1]_3,0))$

$= \phi([3]_3, 0)$

$= \phi([0]_3, 0) = 0$ (1)

pues ϕ es sobreyectiva.

además, ϕ es morfismo:

$\phi(([1],0)*([1],0)*([1],0)) = \phi([1],0) + \phi([1],0) + \phi([1],0)$

$= 3\phi([1],0)$ (2)

usando (1) con (2)

$\Rightarrow 3\phi([1],0) = \phi([0]_3,0) = 0 \Rightarrow \phi([1],0) = 0$

2) Concluya que $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}, +)$ y $(\mathbb{Z}, +)$ no son Isomorfos:

Dem)

- Para que sean isomorfos, debe Haber un morfismo biyectivo entre $\mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}$.

Por la parte anterior, cualquier morfismo sobreyect. Cumple: $\phi([1], 0) = 0$

- Entonces $\phi([0], 0) = 0 = \phi([1], 0)$

$\Rightarrow \phi$ no es inyectiva.

Como ϕ es cualquier Morfismo sobreyect

$\Rightarrow$ no Hay morfismo biyectivo entre $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}$