

P1 Muestre que los s.g. conjuntos son numerables:

a) $A = \{ p^k \mid k \in \mathbb{Z} \}$

lo haremos con función biyectiva!

Sea $f: \mathbb{Z} \rightarrow A$ dada por $f(k) = p^k$

• Veamos que f es biyectiva

• Inyectividad: Sean $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tq

$$f(k_1) = f(k_2) \Rightarrow p^{k_1} = p^{k_2}$$

$$\Rightarrow p^{k_1 - k_2} = 1$$

$$\Rightarrow k_1 - k_2 = 0$$

$$\Rightarrow k_1 = k_2$$

$\therefore f$ es inyectiva.

• Sobreyectividad: Sea $y \in A$

• Como $y \in A$, por def de A se cumple que

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, y = p^k$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, y = f(k) \quad \rightarrow \text{es la def de sobreyectividad.}$$

$\therefore f$ es sobreyectiva.

luego, f es biyectiva y se cumple que

$$|A| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| \rightarrow A \text{ es numerable} //$$

b) $A = \{ (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \mid m \leq n \}$

Probaremos, que A es infinito y que está contenido en un conjunto numerable!

• Veamos que A es infinito.

definamos $A_0 = \{(0, n) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq n\}$

Claramente $A_0 \subseteq A$, además hay infinitos $m \in \mathbb{Z}$
tales que $n \geq 0$
 $\Rightarrow A_0$ es infinito
 $\Rightarrow A$ es infinito

• Además, se tiene que $A \subseteq \underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}_{\text{es numerable}}$

así, A es infinito y está contenido en
un numerable $\Rightarrow A$ es numerable //

c) $A = \{n + m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$

Vamos a escribir A como una unión numerable
de conjuntos numerables.

• Si "fijamos" m y definimos

$$A_m = \{n + m \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad m \in \mathbb{N}$$

Claramente A_m es infinito (está indexado por $\mathbb{N}$)
y además $A_m \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow A_m$ es numerable

• Para obtener A , debemos ponerlos en todos
los casos de m , es decir

$$\Rightarrow A = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m$$

↑
Unión numerable

↑
conjunto numerable

••• A es unión numerable de numerables $\Rightarrow A$ es numerable.

P2 Muestre lo sig

a) $C = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |A| \leq 2\}$ es numerable

• Contemos los casos: $|A|=0$, $|A|=1$ y $|A|=2$

$$C_0 = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |A|=0\} = \{\emptyset\}$$

solo el vacío cumple que
 $|\emptyset|=0$

$$\Rightarrow |C_0| = |\{\emptyset\}| = 1 \rightarrow \text{solo está el Vacío}$$

$$C_1 = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |A|=1\}$$

definimos $f: \mathbb{N} \rightarrow C_1$, $f(n) = \{n\}$

$\rightarrow$ Claramente f es biyectiva

$$\Rightarrow |C_1| = |\mathbb{N}| \rightarrow C_1 \text{ es numerable}$$

$$C_2 = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |A|=2\}$$

$$\hookrightarrow \text{Consideremos } D = \{(n, n) \in \mathbb{N}^2\}$$

$\rightarrow (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \setminus D$ es numerable!

definimos $f: C_2 \rightarrow (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \setminus D$

$$f(\{n, m\}) = (n, m)$$

Veamos biyectividad.

Inject $f(\{n, m\}) = f(\{a, b\})$, donde $n \neq m$
y $a \neq b$

$$\Rightarrow (n, m) = (a, b)$$

$$\Rightarrow a = n \wedge m = b$$

$$\Rightarrow \{n, m\} = \{a, b\} \Rightarrow \text{es inject.}$$

Sobreyect | Sea $(n, m) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \setminus D$

$$\Rightarrow n \neq m.$$

Podemos tomar $A = \{n, m\}$ que cumple $|A| = 2$ ya
que $n \neq m$

$$\text{además, } f(A) = f(\{n, m\}) = (n, m)$$

$\Rightarrow f$ es sobreyect.

$\therefore f$ es biyectiva $\Rightarrow C_2$ es numerable.

luego, usando Todo lo anterior, Tenemos:

$$C = C_0 \cup C_1 \cup C_2$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \nwarrow$
finito numerable numerable

$\Rightarrow C$ es numerable!

b) $C = \{x \in [0, \infty) \mid \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, x^n \in \mathbb{N}\}$ es numerable

Podemos definir $C_n = \{x \in [0, \infty) \mid x^n \in \mathbb{N}\}$, $n \neq 0$

así, tenemos que $C = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} C_n$
 $\uparrow$
unión numerable

Faltaría ver que C_n es numerable.

definimos $f_n: C_n \rightarrow \mathbb{N}$

$$f_n(x) = x^n$$

Veamos biyectividad.

Inject | $f_n(x) = f_n(y) \Rightarrow x^n = y^n$

$\Rightarrow x = y \rightarrow$ inyectiva.

Sobreyect

Sea $m \in \mathbb{N}$, queremos encontrar $x \in \mathbb{C}$ tal que $f_m(x) = m$

Si tomemos $x = m^{1/m}$ se cumple que

- $x \in [0, \infty)$, pues $m \in \mathbb{N}$
- $x^m = (m^{1/m})^m = m \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow x = m^{1/m} \in \mathbb{C}$$

$$\text{y adem\u00f3s, } f_m(x) = f_m(m^{1/m}) = (m^{1/m})^m = m$$

$\therefore$ es sobreyectiva

$\Rightarrow f$ es biyectiva $\Rightarrow C_n$ es numerable

$$\Rightarrow C = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} C_m \text{ es numerable}$$

$$\boxed{C = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, \exists i \in \mathbb{N}, x = \frac{k}{3^i}\}}$$

Hint Usar alguna descomposici\u00f3n de tipo

$$\boxed{C = \bigcup_k \bigcup_i C_{k,i}}$$

2) a) Sea A numerable. $\tilde{F} = \{ f: \{1, 2, 3\} \rightarrow A \mid f \text{ es función} \}$
Muestre que $|\tilde{F}| = |A \times A \times A|$. Concluya que $\tilde{F}$ es num.

• Consideremos la función

$$g: \tilde{F} \rightarrow A \times A \times A$$

$$g(f) = (f(1), f(2), f(3))$$

Veamos que g es biyectiva.

Inyect Sean $f_1, f_2 \in \tilde{F}$ t.q.

$$g(f_1) = g(f_2)$$

$$\Rightarrow (f_1(1), f_1(2), f_1(3)) = (f_2(1), f_2(2), f_2(3))$$

$$\Rightarrow f_1(1) = f_2(1), f_1(2) = f_2(2), f_1(3) = f_2(3)$$

$$\Rightarrow f_1 \text{ y } f_2 \text{ Toman los mismos valores} \Rightarrow f_1 = f_2$$

Sobreyect Sea $(a, b, c) \in A^3$

buscamos $f \in \tilde{F}$ t.q. $g(f) = (a, b, c)$

• Si definimos f como.

$$f(n) = \begin{cases} a & , n=1 \\ b & , n=2 \\ c & , n=3 \end{cases}$$

Claramente f es función y $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow A$

$$\Rightarrow f \in \tilde{F} \text{ y además } g(f) = (f(1), f(2), f(3)) = (a, b, c)$$

• $\therefore g$ es sobreyect.

$$\Rightarrow g \text{ es biyectiva} \Rightarrow |\tilde{F}| = |A \times A \times A|$$

Como A es numerable $\Rightarrow A^3$ es numerable

$$\Rightarrow |A^3| = |\mathbb{N}|$$

$$\Rightarrow |\tilde{F}| = |A^3| = |\mathbb{N}| \rightarrow \tilde{F} \text{ es numerable.}$$

b) Sea A un conjunto y $f: A \rightarrow \mathbb{N}$.

Muestre que si: $\forall n \in \mathbb{N}, f^{-1}(\{n\})$ es numerable entonces A es numerable

Por propiedad de Pre-imagen tenemos:

$$A = f^{-1}(\mathbb{N})$$

Podemos escribir $f^{-1}(\mathbb{N}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(\{n\})$

$\uparrow$
es ponerse en todos los casos

Así, $A = f^{-1}(\mathbb{N}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(\{n\})$
 $\uparrow \quad \quad \quad \uparrow$
Unión numerable numerable

$\Rightarrow A$ es numerable //

Pg) Sean A, B, C infinitos tales que

a) $A \cap B = \emptyset$

b) $A \cap C = \emptyset$

c) $|B| = |C|$

Muestre que $|A \cup B| = |A \cup C|$

Queremos definir una biyección

$$f: A \cup B \rightarrow A \cup C$$

Primero veamos que información tenemos

a) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow$ si: $x \in A \cup B$ entonces solo hay 2 casos

$$\begin{aligned} &\hookrightarrow x \in A \\ &\hookrightarrow x \in B \end{aligned}$$

b) $A \cap C = \emptyset \Rightarrow$ lo mismo que antes

c) $|B| = |C| \Rightarrow$ existe $g: B \rightarrow C$ biyectiva

Con todo lo anterior, definamos

$$f: A \cup B \rightarrow A \cup C$$

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in A \\ g(x), & \text{si } x \in B \end{cases}$$

Veamos biyectiva.

Inject Sea $x, y \in A \cup B$ t.q. $f(x) = f(y)$

Como $A \cap B = \emptyset$, Hay 3 casos:

1) $x, y \in A \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

2) $x, y \in B \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow g(x) = g(y)$

Pues g $\hookrightarrow \Rightarrow x = y$
es biyectiva

3) $x \in A, y \in B \Rightarrow f(x) = f(y)$
 $\Rightarrow x = g(y)$

Pero $g(y) \in C$ y $g(y) = x \in A$

$\Rightarrow g(y) \in C \cap A = \emptyset \Rightarrow$ el caso $x \in A, y \in B$
t.q. $f(x) = f(y)$ no existe,

$\Rightarrow$ en todos los casos $x = y \Rightarrow f$ inject

Sobreyect Sea $y \in A \cup C$, como $A \cap C = \emptyset$, Hay 2 casos.

1) $y \in A$; en este caso podemos tomar $x = y \in A \subseteq A \cup B$
y se cumple que $f(x) = f(y) = y$

2) $y \in C$; Como g es biyectiva, sabemos que existe
 $x \in B$ tal que $g(x) = y$

$\hookrightarrow$ podemos tomar el mismo $x \in B$ y así tenemos
que $f(x) = g(x) = y$

luego f es sobreyectiva.

∴ f es biyectiva $\rightarrow |A \cup C| = |A \cup B|$

P5) Sea A no numerable y $B \subseteq A$ numerable.

Muestre que $A \setminus B$ no es numerable ~~y $\neq \emptyset$~~
Concluya que los irracionales no son numerables

Por contradicción, Supongamos que $A \setminus B$ es numerable.

$$\begin{aligned}\text{Tenemos que } (A \setminus B) \cup B &= (A \cap B^c) \cup B \\ &= (A \cup B) \cap (B \cup B^c) \\ &= A \cup B \cap E\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Pues } B \subseteq A & \Rightarrow A \cup B = A \\ & \hookrightarrow = A\end{aligned}$$

es decir $A = (A \setminus B) \cup B$

$$\begin{array}{ccc} & \uparrow & \uparrow \\ & \text{numerable} & \text{numerable} \\ & \underbrace{\hspace{10em}} & \\ & \text{numerable} & \end{array}$$

● pero sabemos que A no es numerable! $\rightarrow$

∴ $A \setminus B$ es no numerable.

Si definimos $A = \mathbb{R} \leftarrow$ no numerable

$B = \mathbb{Q} \leftarrow$ numerable

Tenemos que $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \leftarrow$ no numerable //