

Auxiliar 10: Cardinalidad infinita
Profesor: Alexis Fuentes P.
Auxiliar: Luis Fuentes C. y Gary Vidal C.

Resumen

- **[Definición]:** Sean A, B conjuntos. Se cumple que :
 1. $|A| \leq |B| \iff$ existe $f : A \rightarrow B$ inyectiva.
 2. $|A| = |B| \iff$ existe $f : A \rightarrow B$ biyectiva.
- **[Proposición]:** Para A, B y C no vacíos, tenemos:
 1. $|A| \leq |A|$
 2. Si $A \subseteq B$, entonces $|A| \leq |B|$
 3. Si $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |C|$, entonces $|A| \leq |C|$
 4. Si $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \iff |A| = |B|$
- **[Conjunto numerable]:** A un conjunto infinito es numerable si $|A| = |\mathbb{N}|$
- **[Proposición]:** $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son numerables.
- **[Los naturales tienen el menor cardinal infinito]:** Sea A un conjunto infinito. $\forall a \in A$ y $\forall k \in \mathbb{N}$, se cumple lo siguiente:
 1. A tiene un subconjunto finito B_k de cardinal k , con $a \in B_k$
 2. A tiene un subconjunto numerable H , tal que $a \in H$. En particular $|\mathbb{N}| \leq |A|$.
- Obs:** Todo conjunto infinito que cumpla $|A| \leq |\mathbb{N}|$ es numerable.
- **[Unión de cjto. finito e infinito]:** Sea A infinito y B finito. Entonces : $|A \cup B| = |A \setminus B| = |A|$
- **[Unión de numerables]:** Si A y B son conjuntos numerables, entonces $A \cup B$ es numerable.
- **[Tupla de numerables]:** Si A, B son numerables, entonces $A \times B$ es numerable.
- **[Unión numerable de numerables]:** Si A_i es numerable $\forall i \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$
Obs: Si $I \subseteq \mathbb{N}$ es un conjunto de índices, entonces $\bigcup_{i \in I} A_i$ es numerable.
- **[Conjunto potencia]** Para cualquier conjunto A , se cumple que $|A| < |\mathcal{P}(A)|$
- **[Proposición]** $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |[0, 1]|$, en particular se tiene que :

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |[0, 1]| = |\mathbb{R}|$$

P1. Pruebe que los siguientes conjuntos son numerables.

- a) $A = \{p^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, con $p \in \mathbb{N}$ fijo.
- b) $A = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \mid m \leq n\}$
- c) $A = \{n + m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$

P2. Demuestre lo siguiente :

- a) Demuestre que $C = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |A| \leq 2\}$ es numerable.

- b) Demuestre que $C = \{x \in [0, \infty) \mid \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, x^n \in \mathbb{N}\}$ es numerable.
- c) [**Propuesto**] Demuestre que $C = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, \exists i \in \mathbb{N}, x = \frac{k}{3^i}\}$ es numerable.

P3. Demuestre lo siguiente:

- a) Sea A un conjunto numerable. Se define $F = \{f : \{1, 2, 3\} \rightarrow A \mid f \text{ es función}\}$. Muestre que $|F| = |A \times A \times A|$. Concluya que F es numerable.
- b) Sea A un conjunto y $f : A \rightarrow \mathbb{N}$. Demuestre que si $\forall n \in \mathbb{N}, f^{-1}(\{n\})$ es numerable, entonces A es numerable.

P4. Sean A, B, C conjuntos infinitos tales que :

- a) $A \cap B = \emptyset$
- b) $A \cap C = \emptyset$
- c) $|B| = |C|$

Muestre que $|A \cup B| = |A \cup C|$

P5. Sea A un conjunto no numerable y $B \subseteq A$ numerable. Pruebe que $A \setminus B$ es no numerable. Concluya que los irracionales no son numerables.