

P1) Demuestre lo sig.

a) Para A, B, C conjuntos finitos, Muestre que

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Dem

Usaremos la Propiedad $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$

Si definimos $D = B \cup C$, Tenemos:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A \cup D| && \text{Prop con } |A \cup D| \\ &= |A| + |D| - |A \cap D| && \text{Prop con } |B \cup C| \\ &= |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)| \\ &= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |(A \cap B) \cup (A \cap C)| && \text{Prop con } |(A \cap B) \cup (A \cap C)| \\ &= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| \end{aligned}$$

b) Sea $\{C_1, \dots, C_m\}$ una partici3n de un esto finito A . Muestre que $\sum_{i=1}^m |C_i| = |A|$

• Sabemos que $\{C_1, \dots, C_m\}$ por ser partici3n cumple 3 cosas.

1) $\forall i \in \{1, \dots, m\}, C_i \neq \emptyset$

2) $\forall i, j \in \{1, \dots, m\}, i \neq j, C_i \cap C_j = \emptyset$

3) $A = \bigcup_{i=1}^m C_i$

• Como $C_i \subseteq A$ y A es finito $\Rightarrow C_i$ es finito $\forall i$

• Adem3s, los C_i 's son disjuntos de a pares

Con estas dos cosas Tenemos que: $|\bigcup_{i=1}^m C_i| = \sum_{i=1}^m |C_i|$

Con esto y la prop. 3) Tenemos: $|A| = |\bigcup_{i=1}^m C_i| = \sum_{i=1}^m |C_i|$

P2)

a) Demuestre que:

$$|\{2i+1 \mid i \in \mathbb{N}, 0 \leq i < 2^{m-1}, m \in \{1, \dots, m\}\}| = 2^{m-1}$$

Denotemos $A = \{2i+1 \mid i \in \mathbb{N}, 0 \leq i < 2^{m-1}, m \in \{1, \dots, m\}\}$

A tiene 2 índices que "recorren" el conjunto,
Como el i llega hasta 2^{m-1} , veamos que pasa
cuando nos ponemos en casos con el m

• Si: $m=1 \rightarrow 0 \leq i < 2^{1-1} = 1$

$$\rightarrow \{2 \cdot 0 + 1\} = A_1$$

• Si: $m=2 \rightarrow 0 \leq i < 2^{2-1} = 2$

$$\rightarrow \{2 \cdot 0 + 1, 2 \cdot 1 + 1\} = A_2$$

Si "fijamos" el m , podemos definir

$$A_m = \{2i+1 \mid 0 \leq i < 2^{m-1}\}, \quad \forall m \leq m$$

|
m fijo!

Esto cumple que

1) $A = \bigcup_{n=1}^m A_n \rightarrow$ Pues tomamos todos los casos de $m \in \{1, \dots, m\}$

2) $A_n \subseteq A_{n+1} \rightarrow$ Pues si: $2i+1 \in A_n$
 $\Rightarrow 0 \leq i < 2^{n-1} \leq 2^{(n+1)-1}$
 $\Rightarrow 2i+1 \in A_{n+1}$

de 2) Tenemos que $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots \subseteq A_m$

Usando esto, obtenemos que:

$$A = \bigcup_{n=1}^m A_n = A_m$$

Por lo que solo queda mostrar que $|A_m| = 2^{m-1}$

↳ Usaremos una función biyectiva que llegue a A_m !

definamos $f: [0, \dots, 2^{m-1}-1] \longrightarrow A_m$

$$f(i) = 2i+1$$

Como $i \in [0, \dots, 2^{m-1}-1] \Rightarrow f(i) \in A_m$

además es biyectiva (es lineal)

→ Por propiedad $|\{0, \dots, 2^{m-1}-1\}| = |A_m|$

$$\Rightarrow (2^{m-1}-1)+1 = |A_m|$$

$$\Rightarrow 2^{m-1} = |A_m|$$

$$b) |\left\{ \frac{2i+1}{2^n} \mid i \in \mathbb{N}, 0 \leq i < 2^{n-1}, n \in \{9, 10\} \right\}| = 2^8 + 2^9$$

• Aquí el n solo tiene dos casos: $n \in \{9, 10\}$

$$\Rightarrow A = \underbrace{\left\{ \frac{2i+1}{2^9} \mid 0 \leq i < 2^{9-1} \right\}}_{A_8} \cup \underbrace{\left\{ \frac{2i+1}{2^{10}} \mid 0 \leq i < 2^{10-1} \right\}}_{A_9}$$

A_8

A_9

Veamos que $|A_8| = 2^8$ usando una fun. biyectiva

Si definimos $f: [0, \dots, 2^8-1] \longrightarrow A_8$

$$f(i) = \frac{2i+1}{2^9}$$

es biyectiva $\Rightarrow |A_8| = |\{0, \dots, 2^8-1\}| = (2^8-1)+1 = 2^8$

Para A_9 es análogo, así tenemos que $|A_8| = 2^8$

$$|A_9| = 2^9$$

Veamos que son disjuntos: $A_8 \cap A_9 = \emptyset$

↳ Si no lo fuesen, existiría $y \in A_8 \cap A_9$

$$\Rightarrow y \in A_8 \wedge y \in A_9 \Rightarrow y = \frac{2i+1}{2^9} \wedge y = \frac{2j+1}{2^{10}}$$

$$\Rightarrow \frac{2i+1}{2^9} = \frac{2j+1}{2^{10}} \Rightarrow \frac{2 \cdot (2i+1)}{\text{por } 2} = \frac{2j+1}{\text{por } 2} \quad \text{¡!}$$

• Entonces tenemos $A_8 \cap A_9 = \emptyset$

Con lo anterior:

$$A = A_8 \cup A_9 \Rightarrow |A| = |A_8 \cup A_9| = |A_8| + |A_9| = 2^8 + 2^9 //$$

$$C/\left\{ \frac{2i+1}{2^n} \mid i \in \mathbb{N}, 0 \leq i < 2^{n-1}, n \in \{1, \dots, m\} \right\} = 2^m - 1$$

Aquí definimos $A_n = \left\{ \frac{2i+1}{2^n} \mid 0 \leq i < 2^{n-1} \right\}$ con n fijo

Así se tiene que $A = \bigcup_{i=1}^m A_m$, Pero no se cumple $A_m \subseteq A_{m+1}$!

• Aún así, podemos usar la propiedad

$$\left| \bigcup_{n=1}^m A_m \right| = \sum_{n=1}^m |A_m| \rightarrow \text{Solo Hay que ver que los } A_m \text{'s sean disjuntos de a pares}$$

• Veamos que los A_m son disjuntos: $A_k \cap A_l = \emptyset$

$\hookrightarrow$ Si no lo fuesen tomemos $y \in A_k \cap A_l$, $k > l$

$$\Rightarrow y \in A_k \wedge y \in A_l$$

$$\Rightarrow y = \frac{2i+1}{2^k} \wedge y = \frac{2j+1}{2^l}$$

$$\Rightarrow \frac{2i+1}{2^k} = \frac{2j+1}{2^l} \Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{impar}}}{(2i+1)} = 2^{k-l} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{par}}}{(2j+1)}$$

$\Rightarrow A_m$ son disjuntos a pares

Además, usando fn biyectiva, tenemos que $|A_m| = 2^{m-1}$

$\hookrightarrow$ usando $f: \{0, \dots, 2^{m-1}-1\} \rightarrow A_m$

$$f(i) = \frac{2i+1}{2^m}$$

Con todo lo anterior, tenemos que:

$$\begin{aligned} |A| &= \left| \bigcup_{n=1}^m A_n \right| = \sum_{n=1}^m |A_n| \\ &= \sum_{n=1}^m 2^{n-1} \quad \text{Suma geométrica} \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} 2^n = \frac{2^{(m-1)+1} - 1}{2 - 1} \\ &= \underline{\underline{2^m - 1}} \end{aligned}$$

~ P3 Sea $A = [1, \dots, m]$ y considere $(x_0, x_1, \dots)$ tal que $x_i \in A, \forall i \in \mathbb{N}$. Pruebe que existen k, l distintos tales que $x_l = x_k$.

Por Contradicción, asumimos que los índices no se repiten; $\forall k, l, k \neq l, x_l \neq x_k$

• Usaremos una función:

$$f: [0, \dots, m] \longrightarrow (x_0, x_1, \dots)$$

dada por $f(k) = x_k$

~ $\hookrightarrow$ es inyectiva pues si se cumple

$$f(k) = f(l) \Rightarrow x_k = x_l \Rightarrow k = l$$

$\uparrow$ pues por Hip los x_i no se repiten.

Como f es inyectiva:

$$|[0, \dots, m]| \leq |(x_0, x_1, \dots)|$$

$$\Rightarrow m+1 \leq |(x_0, \dots,)|$$

Además, como $x_i \in A, \forall i \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow (x_0, x_1, \dots) \subseteq A = \{1, \dots, n\}$$

$$\Rightarrow |(x_0, \dots)| \leq |A| = n$$

Con lo anterior:

$$n+1 \leq |(x_0, \dots)| \leq n \Rightarrow n+1 \leq n$$

$$\Rightarrow n \leq 0$$

∴ los x_i se deben repetir //