Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1101-10 Introducción al Álgebra
20 de mayo de 2024

Auxiliar 9: Cardinalidad Finita

Profesor: Alexis Fuentes P.
Auxiliar: Luis Fuentes C. y Gary Vidal C.

Resumen

- **[Definición]:** A es finito si existe $n \in \mathbb{N}$ y $\{a_1, ..., a_n\}$ distintos entre si tales que $A = \{a_1, ..., a_n\}$. La cardinalidad de A es n y se denota $|A| = n$
- **[Propiedades]:** Sean A, B conjuntos.
  - $|A| = 0 \iff A = \emptyset$
  - Si A es finito y $f : A \to B$ biyectiva, entonces B es finito y $|A| = |B|$
  - Sea B finito. Si $A \subseteq B$ entonces A es finito y $|A| \leq |B|$.
- **[Cardinal de la diferencia]:** Si $B \subseteq A$ y A finito entonces $|A \backslash B| = |A| - |B|$. En particular, si $|A| = |B|$ entonces $A = B$.
- **[Cardinal de la unión]:** Si A, B son conjuntos finitos, entonces:
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$
- **[Proposición]:** Sean A, B finitos con $|A| = |B|$ y sea $f : A \to B$ función. Las siguientes son equivalentes:
  1. f es inyectiva.
  2. f es sobreyectiva.
  3. f es biyectiva.
- **[Proposición]:** Sean A, B conjuntos, donde B es finito. Se cumple que :
  1. A finito y $|A| \leq |B| \iff$ existe $f : A \to B$ inyectiva.
  2. A finito y $|A| = |B| \iff$ existe $f : A \to B$ biyectiva.
- **[Cardinalidad unión finita conjuntos disjuntos]:** Si $\{A_1, ..., A_m\}$ son finitos y disjuntos de a pares, entonces:
$$\left|\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right| = \sum_{i=1}^{m} |A_i|$$
- **[Cardinal producto cartesiano]:** Para A, B finitos, se tiene que $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
- **[Conjunto de funciones]:** El conjunto de todas las funciones de A en B se define por:
$$B^A = \{f : A \to B |\ \text{f es función}\}$$
Si A, B son finitos, entonces : $\left|B^A\right| = |B|^{|A|}$

P1. Demuestre lo siguiente:

a) Para A, B, C Conjuntos finitos. Muestre que
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

b) Sea $\{C_1, C_2, ..., C_m\},\ m \in \mathbb{N}$ una partición de un conjunto finito A. Muestre que $|A| = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} |C_i|$

P2. Demuestre que:

a) $\left|\{2i+1 \mid i \in \mathbb{N}, 0 \leq i < 2^{n-1}, n \in \{1, ..., m\}\}\right| = 2^{m-1}$

b) $\left|\{\frac{2i+1}{2^n} \mid i \in \mathbb{N}, 0 \leq i < 2^{n-1}, n \in \{9, 10\}\right| = 2^8 + 2^9$

c) $\left|\{\frac{2i+1}{2^n} \mid i \in \mathbb{N}, 0 \leq i < 2^{n-1}, n \in \{1, ..., m\}\}\right| = 2^m - 1$

P3. Sea $A = [1, ..., n]$ y considere una secuencia $(x_0, x_1, x_2, ...)$ de elementos en A (es decir $x_i \in A, \forall i \in \mathbb{N}$). Pruebe que existen $l, j \in \mathbb{N}$ distintos tales que $x_l = x_j$.

P4. **[Propuesto]** Sea S_n el conjunto de funciones biyectivas de $[1, .., n]^{[1,..,n]}$.

a) Determine cuantas funciones $f \in S_n$ cumplen $f(1) = 1$

b) Determine cuantas funciones $f \in S_n$ cumplen que $\exists k \in [1, .., n], f(k) = k$ para $n = 3$.

c) Determine cuantas funciones $f \in S_n$ cumplen que $\forall k \in [1, ..., n], f(k) \neq k$ para $n = 4$.

d) Determine cuantas funciones $f \in S_n$ cumplen que $\exists! k \in [1, ..., n], f(k) = k$ para $n = 5$.