Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1101-10 Introducción al Álgebra
13 de mayo de 2024

Auxiliar 8: Sumatorias

Profesor: Alexis Fuentes P.
Auxiliar: Luis Fuentes C. y Gary Vidal C.

Resumen

- **[Secuencia]:** Una secuencia de número reales e suna función $a : I \to \mathbb{R}$ donde $I \subseteq \mathbb{N}$. Como notación, una secuencia también se anotara $a = (a_k)_{k\in I}$, donde $a_k = a(k)$.
- **[Sumatoria]:** Sea $(a_k)_{k\geq m}$ una secuencia. Para $n \geq m$, definimos la sumatoria como la recurrencia:
$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \begin{cases} a_m, & \text{si } n = m \\ a_n + \sum_{k=m}^{n-1} a_k, & \text{si } n \geq m \end{cases}$$
- **[Proposición]:** Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(a_k)_{k\geq m}, (b_k)_{k\geq m}$ dos secuencias. $\forall n \geq m$ se tiene que :
  1. Secuencia constante
  $$\sum_{k=m}^{n} 1 = n - m + 1 \tag{1}$$
  2. Factorización de constantes
  $$\sum_{k=m}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k \tag{2}$$
  3. Sumatoria de dos secuencias
  $$\sum_{k=m}^{n} a_k + b_k = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k \tag{3}$$
  4. Traslación de indices para $s \in \mathbb{N}$
  $$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+s}^{n+s} a_{k-s} \tag{4}$$
  5. Separación de índices para $m \leq s \leq n$
  $$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{s} a_k + \sum_{k=s+1}^{n} a_k \tag{5}$$
  6. Telescópica
  $$\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1} \tag{6}$$
- **[Sumas clásicas]:** Para $n \in \mathbb{N}$ se tienen las siguientes sumas:
  1. $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
  2. $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
  3. $\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$
- **[Teorema del binomio]:** Sea $x, y \in \mathbb{R}$. Para $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$
Donde
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$
- **[Propiedad]:** Sea $(a_k)_{k\in[1\ldots n]}$ una secuencia de números reales. Sean $I, J \subset [1, ..., n]$ disjuntos. Entonces:
$$\sum_{k\in I\cup J} a_k = \sum_{k\in I} a_k + \sum_{k\in J} a_k$$

P1. Calcule lo siguiente:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)$

b) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n-1} (k-2)(k+1)$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} ((k-1)^2 - k^2)$

d) $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} (1 - 4 \cdot 2^k)$

e) Para $n \leq m : \displaystyle\sum_{k=n}^{m} \log(1 + \frac{1}{k})$

P2. Calcule lo siguiente:

a) Calcule lo siguiente en función de n:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \binom{n}{k-1} 3^k$$

b) [**Propuesto**]Dadas $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Se define $(f * g) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ por :

$$(f * g)(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k) g(n-k)$$

Si $f(k) = \frac{a^k}{k!}$, $g(k) = \frac{b^k}{k!}$ donde $a, b \in \mathbb{R}$. Calcule $(f * g)(n)$

P3. Demuestre por inducción:

a) Demuestre que $\forall n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2 = \sum_{k=1}^{n} (4k - 1)$$

b) [**Propuesto**]**:** Muestre que

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{4(k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{3} + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n+3}$$