P1)

a) Demuestre que:

$$A \subseteq B \subseteq C \Rightarrow C \setminus (A \setminus B) = A \cup (C \setminus B)$$

Dem) es una implicancia, asumimos el lado izq. y queremos demostrar que

$$\underbrace{C \setminus (A \setminus B)}_{\text{Partiremos desde aquí}} = A \cup (C \setminus B)$$

$$\bullet\ C \setminus (B \setminus A) = C \cap (B \setminus A)^c \quad \text{def de } \setminus$$

$$= C \cap (B \cap A^c)^c \quad \text{morgan}$$

$$= C \cap (B^c \cup A) \quad \text{distribución}$$

$$= (C \cap B^c) \cup (C \cap A)$$

$= (C \setminus B) \cup (C \cap A)$ (1)

$\star$ Como $A \subseteq B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

$\Rightarrow A \cap C = A$

Con esto, reemplazando en (1) tenemos:

$C \setminus (B \setminus A) = (C \setminus B) \cup A$ //

b) $\boxed{A \cap B^c = \phi \Leftrightarrow A \subseteq B}$

Dem) Hay que mostrar un si solo si, lo haremos por doble implicancia!

$\Rightarrow$ Queremos mostrar

$$A \cap B^c = \phi \Rightarrow A \subseteq B$$

Por contrarecíproca!

$$A \not\subseteq B \Rightarrow A \cap B^c \neq \phi$$

. que $A \not\subseteq B$ significa que existe un elemento en A que no esté en B. Formalmente:

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x \in E,\ x \in A \wedge x \notin B$$

Def. de B^c $\Leftrightarrow \exists x \in E,\ x \in A \wedge x \in B^c$

$$\Leftrightarrow \exists x \in E,\ x \in A \cap B^c$$

$$\Rightarrow A \cap B^c \neq \phi$$

Pués almenos $\exists x \in E$ que vive en la intersección.

$\boxed{\Leftarrow}$ Asumimos $A \subseteq B$,

$\underline{\text{Pdq}}$ $\boxed{A \cap B^c = \phi}$

Por contradicción!

• asumimos que $\exists x \in E$ tal que

$x \in A \cap B^c \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B^c$

usando $A \subseteq B$ $\Rightarrow x \in B \wedge x \in B^c$

$\Leftrightarrow x \in \underbrace{B \cap B^c}$

$\Leftrightarrow x \in \phi$ ¡!

Contradicción, Pués $x \in \phi \Leftrightarrow F$ siempre

∴ Con las dos implicancias, se muestra el si solo si //

c) $A \cap B = \phi \iff A \Delta B = A \cup B$

Dem) Por doble implicación!

$\Rightarrow$) $\boxed{\text{Pdq } A \Delta B = A \cup B}$

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$ (usando el Hint)

$$= (A \cup B) \setminus \phi$$ (Por Hipótesis $A \cap B = \phi$)

$$= (A \cup B) \cap \phi^c$$

$$= (A \cup B) \cap E$$

$$= A \cup B$$

$\Leftarrow$) Pdq $\boxed{A \cap B = \phi}$

Tenemos que

Hint!

$$A \cup B = A \Delta B \overset{\checkmark}{=} (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

$\Rightarrow A \cup B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Siempre se cumple que $A \cap B \subseteq A \cup B$. la igualdad nos dice que al restar el subconjunto $A \cap B$ a $A \cup B$, obtenemos $A \cup B$, es decir no restamos nada

$\Rightarrow A \cap B = \emptyset$ //

P2 | Sean $A, B \in \mathcal{P}(E)$

a) $A \subseteq B \iff \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

Dem/ Por doble implicancia!

$\Rightarrow$) Asumimos $A \subseteq B$, queremos probar $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

- Sea $X \in \mathcal{P}(A) \underset{\text{def. de } \mathcal{P}(A)}{\iff} X \subseteq A$

$\Leftrightarrow X \subseteq A \subseteq B$

Por la Hipotesis

$\Rightarrow X \subseteq B$

$\Leftrightarrow X \in \mathcal{P}(B)$

Entonces:

$$\left[X \in \mathcal{P}(A) \Rightarrow X \in \mathcal{P}(B)\right]$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \quad //$$

$\boxed{\Leftarrow}$ asumimos $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

Pdq: $A \subseteq B$.

Sea $x \in A \Leftrightarrow \{x\} \subseteq A$

Recordar que los singleton $\{x\}$ son conjuntos, aunque solo tengan un elemento!

$\{X\} \subseteq A \Leftrightarrow \{x\} \in \mathcal{P}(A)$

Hipotesis

$\Rightarrow \{x\} \in \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

$$\Rightarrow \{x\} \in \mathcal{P}(B)$$

$$\Leftrightarrow \{x\} \subseteq B \Leftrightarrow x \in B$$

es decir, $\underbrace{x \in A \Rightarrow x \in B}_{A \subseteq B}$

* Probemos que $A = B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$

Sale con puros $\Leftrightarrow$

$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ Por def. de igualdad

lo que mostramos antes! $\Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \wedge \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A)$

$\Leftrightarrow \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$

b) Muestre que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

Dem) Sale con puros $\Leftrightarrow$

Sea $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$

$$\Leftrightarrow X \subseteq A \cap B$$

$$\Leftrightarrow X \subseteq A \wedge X \subseteq B$$

$$\Leftrightarrow X \in \mathcal{P}(A) \wedge X \in \mathcal{P}(B)$$

$$\Leftrightarrow X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$$

es decir:

$$\underbrace{X \in \mathcal{P}(A \cap B) \Leftrightarrow X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)}$$

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$$

P3 | Sean $A, B \subseteq E$, $A \neq \phi$. Para $X \subseteq E$ se define

$$C(X) = \begin{cases} X \setminus B & , \text{si } A \cap X \neq \phi \\ X \cup B & , \text{si } A \cap X = \phi \end{cases}$$

a] $C(B) \in \{\phi, B\}$

Dem] $C(B)$ tiene dos posibilidades

1) si $A \cap B \neq \phi$

$\Rightarrow C(B) = B \setminus B = \phi$

2) si $A \cap B = \phi$

$\Rightarrow C(B) = B \cup B = B$

es decir $C(B) = \phi$ ó $C(B) = B$

$\Rightarrow C(B) \in \{\phi, B\}$

b]

Calculemos primero $C(A)$.

Como $A \cap A = A \neq \phi$

$\Rightarrow C(A) = A \setminus B$

· Ahora, veamos $C(A^c)$

Como $A \cap A^c = \phi$

$\Rightarrow C(A^c) = A^c \cup B$

$= (A \cap B^c)^c$) Morgan

$= (A \setminus B)^c$

$= C(A)^c$ //

c) si $(X \cap Y) \cap A \neq \phi$

$\Rightarrow C(X \cap Y) = C(X) \cap C(Y)$

Dem) Queremos mostrar el lado derecho de la implicancia usando el lado izq.

· Como $(X \cap Y) \cap A \neq \phi$

$\Rightarrow C(X \cap Y) = (X \cap Y) \setminus B$

$$= (X \cap Y) \cap B^c$$

$$= X \cap Y \cap B^c \cap B$$ idem-potencia

$$= X \cap B^c \cap Y \cap B^c$$

$$= (X \setminus B) \cap (Y \setminus B)$$

fijemonos que $X \setminus B$ es casi $C(X)$. Para esto tenemos que mostrar que $\underline{A \cap X \neq \emptyset}$

· Tenemos que:

$$\emptyset \neq (X \cap Y) \cap A \subseteq X \cap A \Rightarrow X \cap A \neq \emptyset$$

luego $C(X) = X \setminus B$ y concluímos

Para $C(Y)$ es análogo.

forma alternativa de mostrar que $X \cap A \neq \emptyset$

- Por contradicción!

Suponemos que $X \cap A = \emptyset$

$\Rightarrow (X \cap Y) \cap A \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow (X \cap A) \cap Y \neq \emptyset$

$\Rightarrow \underbrace{\quad}_{\emptyset} \cap Y \neq \emptyset$

$\Rightarrow \emptyset \neq \emptyset$ $\Rightarrow\Leftarrow$

Contradicción! luego $X \cap A = \emptyset$ //