Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1101-10 Introducción al Álgebra
8 de abril de 2024

Auxiliar 3: Conjuntos

Profesor: Alexis Fuentes P.
Auxiliar: Luis Fuentes C. y Gary Vidal C.

Resumen

- **[Conjunto Vacío]:** El conjunto vacío, denotado $\emptyset$, es un conjunto que no tiene elementos, es decir, cumple que cualquiera que sea el conjunto de referencia E:

$$\forall x \in E, x \in \emptyset \Leftrightarrow F$$

- **[Igualdad]:** Se dice que los conjuntos A y B son iguales, denotado $A = B$, si A y B tienen los mismos elementos.

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x \in E, x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

- **[Inclusión]:** Se dice que A es subconjunto de B (o que A está contenido en B, o que A está incluido en B), denotado $A \subseteq B$, si todos los elementos de A están en B.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in E, x \in A \Rightarrow x \in B)$$

- **[Proposición]:** Para $A, B, C \subseteq E$, se cumplen las siguientes propiedades:
  - Reflexividad de la $\subseteq$: $A \subseteq A$.
  - Antisimetría de la $\subseteq$: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.
  - Transitividad de la $\subseteq$: $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$.
- **[Proposición]:** $\emptyset \subseteq A \subseteq E$.
- **[Proposición]:** Para $A, B, C \subseteq E$, se cumplen las siguientes propiedades:
  - Reflexividad de $=$: $A = A$.
  - Simetría de $=$: $A = B \Leftrightarrow B = A$.
  - Transitividad de $=$: $A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$.
- **[Unión]:** La unión de A y B, denotada $A \cup B$, es el conjunto que reúne a los elementos que están en al menos uno de los dos conjuntos A o B.

$$\forall x \in E, x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$

- **[Intersección]:** La intersección de A y B, denotada $A \cap B$, es el conjunto de los elementos que están tanto en A como en B.

$$\forall x \in E, x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$

- $X \subseteq Y \wedge W \subseteq Z \Rightarrow X \cap W \subseteq Y \cap Z$
- $X \subseteq Y \wedge W \subseteq Z \Rightarrow X \cup W \subseteq Y \cup Z$
- **[Conjunto complemento]:** El complemento de un conjunto A se denota A^c y son los elementos que están en E pero no en A.

$$\forall x \in E,\ x \in A^c \iff x \notin A$$

- **[Diferencia]:** La diferencia entre A y B se define como $A \backslash B = A \cap B^c$
- **[Diferencia simétrica]:** La diferencia simétrica entre A y B se define como $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$
- **[Conjunto potencia]:** El conjunto potencia $\mathcal{P}(A)$ es la familia de todos los subconjuntos de A. Queda determinado por

$$C \in \mathcal{P}(A) \iff C \subseteq A$$

P1. Sea E el conjunto universo, para $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$, demuestre lo siguiente.

a) $A \subseteq B \subseteq C \Rightarrow C \backslash (B \backslash A) = A \cup (C \backslash B)$

b) $A \cap B^c = \emptyset \iff A \subseteq B$

c) $A \cap B = \emptyset \iff A \Delta B = A \cup B$
Hint: Puede utilizar que $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$

P2. Sean $A, B \in \mathcal{P}(E)$

a) Demuestre que $A \subseteq B \iff \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.
Con esto concluya que $A = B \iff \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$

b) Demuestre que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

P3. Sea E el conjunto universo y $A, B \subseteq E,\ A \neq \emptyset$. Para $X \subseteq E$ se define el conjunto $C(X)$ como :

$$C(X) = \begin{cases} X \backslash B, & \text{Si } A \cap X \neq \emptyset \\ X \cup B, & \text{Si } A \cap X = \emptyset \end{cases}$$

Pruebe lo siguiente :

a) $C(B) \in \{\emptyset, B\}$

b) $C(A) = A \backslash B$ y $C(A^c) = C(A)^c$

c) Si $(X \cap Y) \cap A \neq \emptyset \implies C(X \cap Y) = C(X) \cap C(Y)$.