Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1101-10 Introducción al Álgebra
25 de marzo de 2024

Auxiliar 2: Cuantificadores e inducción.

Profesor: Alexis Fuentes P.
Auxiliar: Luis Fuentes C. y Gary Vidal C.

Resumen

- **[Función proposicional]:** Una función proposicional $P(x)$ es una función que toma variables en un conjunto de referencia E. Esta función puede ser verdadera o falsa según la variable x que se fije.
- **[Cuantificador universal]:** Se denota $\forall$ y se lee "para todo". $\forall x \in E, P(x)$ es verdadera si al reemplazar x por cualquier elemento de E, se cumple $P(x)$.
- **[Contraejemplo]:** Un elemento $e \in E$ tal que $P(e)$ es falsa se denomina contraejemplo de $\forall x \in E, P(x)$
- **[Cuantificador existencial]:** Se denota $\exists$ y se lee "existe". $\exists x \in E, P(x)$ es verdad si hay algún elemento x en E tal que $P(x)$ se cumple.
- **[Existencia y unicidad]:** Se denota $\exists!$ y se lee "existe un único". $\exists! x \in E, P(x)$ es verdad si hay exactamente un elemento $x \in E$ tal que $P(x)$ se cumple.
- **[Principio de Inducción]:** Si $n_0 \in \mathbb{N}$ y $p(n)$ es una función proposicional en el conjunto de los números naturales $n \in \mathbb{N}$ tales que $n \geq n_0$, entonces se tiene el **Principio de Inducción**, esto es, la siguiente proposición es una tautología:

$$[p(n_0) \wedge (\forall n \geq n_0, p(n_0+1) \wedge \ldots \wedge p(n-1) \Rightarrow p(n))] \Leftrightarrow (\forall n \geq n_0, p(n))$$

Débil : donde ocupamos únicamente el caso inmediatamente anterior
Fuerte :donde ocupamos más que solo el caso inmediatamente anterior.

P1. Determine el valor de verdad y luego niegue las siguientes proposiciones :

1) $(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 < 0$
3) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ x \leq y$

P2. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones :

1) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})[x < y \Rightarrow (\exists z \in \mathbb{R})\ x < z < y]$
2) $(\forall x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})[x < y \Rightarrow (\exists z \in \mathbb{N})\ x < z < y]$

Hint : $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \wedge r)]$

P3. Demuestre por inducción las siguientes proposiciones :

1) Se cumple que, $\forall n \geq 1$:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

2) $\forall n \geq 10$, se tiene que $n^3 < 2^n$

3) Demuestre que $8 \cdot 7^n - 14$ es divisible por 21, para todo $n \geq 1$.

4) $\forall n \in \mathbb{N}, 6^{2n+1} + 8^{2n}$ es divisible por 7.

P4. Sea $C \in \mathbb{R},\ C \neq 1$. Considere la recurrencia dada por $a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = (C-1)a_{n-1} + Ca_{n-2}$ para todo $n \geq 2$. Pruebe que :

$$a_n = \frac{C^n - (-1)^n}{C+1}$$

P5. **[Propuesto]** Observe que podemos descomponer los números $14, 15$ y 16 como suma de 3s y 8s:

$$\begin{aligned} 14 &= 3 + 3 + 8 \\ 15 &= 3 + 3 + 3 + 3 + 3 \\ 16 &= 8 + 8 \end{aligned}$$

Pruebe el resultado general, es decir, que $\forall n \geq 14$, n se puede escribir como suma de 3s y 8s.