Introducción al Álgebra MA1101

Guía 4: Conjuntos

Definiciones básicas:

- $\forall X \subseteq E,\ X \in \mathcal{P}(A) \iff X \subseteq E.$
- $\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ (a, b) \in A \times B \iff a \in A \wedge b \in B.$

En lo que sigue, $E \neq \emptyset$ denota un conjunto de referencia.

P1. Sean $A, B \subseteq E$ y $a, b, c, d \in E$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son Verdaderas y cuáles Falsas?

(a).- $a \subseteq \{a\}$.

(b).- $\{a\} \subseteq \{a, b\}$.

(c).- $\emptyset \subseteq \emptyset$.

(d).- $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$.

(e).- $\{a\} \subseteq \mathcal{P}(\{a, b\})$.

(f).- $a \in (a, b)$.

(g).- $(a, b) \notin A \times B \iff a \notin A \wedge b \notin B$.

(h).- $\{(a, b), (c, d)\} \subseteq A \times B \iff \{(a, d), (c, b)\} \subseteq A \times B$.

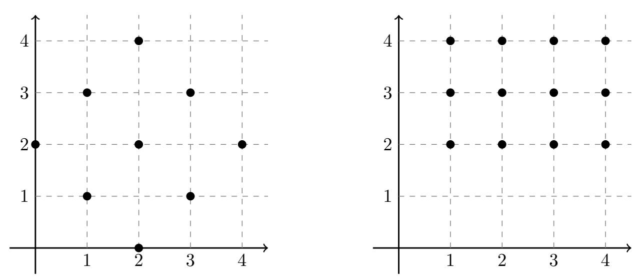
P2. Sean $A, B \subseteq E$.

(a).- Pruebe que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

(b).- Muestre que si E tiene al menos dos elementos, entonces $\exists A, B \subseteq E, \mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

(c).- Pruebe que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \iff A \subseteq B$.

P3. Sean Ω y Φ subconjuntos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ cuyos elementos están dados por los círculos negros de las Figuras (a) y (b). Si es posible exprese Ω y/o Φ en la forma $A \times B$ para algún $A, B \subseteq \mathbb{N}$, y en caso de no ser posible, argumente por qué no.



(a) Ω (b) Φ

P4. Sean $A, B \subseteq E$.

(a) Probar que $A^c \times B^c \subseteq (A \times B)^c$ donde $(A \times B)^c$ denota $(E \times E) \setminus (A \times B)$.

(b) Muestre con un contraejemplo[1] que no se cumple que $A^c \times B^c = (A \times B)^c$.

(c) Muestre que para cualquier conjunto $E \neq \emptyset$, existen $A, B \subseteq E$ tales que $A^c \times B^c \neq (A \times B)^c$. ¿Qué pasa si $E = \emptyset$?

P5. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define $D_n = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a + b = n\}$. Demuestre que $\mathcal{D} = \{D_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una partición de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

[1] Es decir, proponga conjuntos A, B, E con A y B subconjuntos de E.