**Introducción al Álgebra MA1101**

# Guía 06: Funciones y Relaciones

**Definiciones básicas:**

- Para $f : E \to F$ función, $A \subseteq E$, $B \subseteq F$,
  - $f(A) = \{f(x) \in F | x \in A\}$.
  - $f^{-1}(B) = \{x \in E | f(x) \in B\}$
- Para $\mathcal{R} \subseteq A \times A$, $\mathcal{R}$ es
  - Refleja: si $\forall a \in A,\ a\mathcal{R}a$.
  - Simétrica: si $\forall a, a' \in A,\ a\mathcal{R}a' \Leftrightarrow a'\mathcal{R}a$.
  - Antisimétrica: si $\forall a, a' \in A,\ a\mathcal{R}a' \wedge a'\mathcal{R}a \Rightarrow a = a'$.
  - Transitiva: si $\forall a, b, c \in A,\ a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c$.

**P1.** Sean $E$, $F$ conjuntos no vacíos. Sea $f : E \to F$ función. Demuestre las siguientes propiedades,

a) $\forall B \subseteq F,\ f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$.

b) $\forall A \subseteq E,\ f(A^c) \subseteq (f(A))^c \iff f$ inyectiva.

**P2.** Sean $E$, $F$ conjuntos no vacíos. Sea $f : E \to F$ función.

a) Sean $A, B \subseteq E$. Demuestre que $f(B) \setminus f(A) = \emptyset \implies f(A \cup B) = f(A)$.

b) Demuestre que $f$ es inyectiva si satisface la siguiente propiedad,

$$\forall A, B \subseteq E, (A \subseteq B \wedge A \neq B \implies f(A) \neq f(B)).$$

Indicación: Recuerde que para demostrar que $f$ es inyectiva debe probar que $\forall x, y \in E,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$. Puede ser útil construir los conjuntos $A$ y $B$ adecuadamente usando los elementos $x$ e $y$ y luego usar la propiedad de $f$.

**P3.** Se define en $\mathbb{N}$ la relación $\mathcal{T}$ de la siguiente forma: para $m, n \in \mathbb{N}$,

$$m\mathcal{T}n \iff (m = n) \vee (2|n \wedge 2|m).$$

Estudie la reflexividad, simetría, antisimetría y transitividad de $\mathcal{T}$.

**P4.** Las siguientes relaciones en $\mathbb{Z}$ son reflejas. Determine cuáles son relaciones de equivalencia e indique las clases de equivalencia asociadas a 0, cuando lo sean.

(a) Para $p, q \in \mathbb{Z}$, $p$ se relaciona con $q$ si $p + q$ es múltiplo de $p$.

(b) Para $p, q \in \mathbb{Z}$, $p$ se relaciona con $q$ si $p - q$ o $q - p$ es un número al cuadrado.

(c) Para $p, q \in \mathbb{Z}$, $p$ se relaciona con $q$ si $p^2 - q^2$ es un múltiplo de 5.

(d) Para $p, q \in \mathbb{Z}$, $p$ se relaciona con $q$ si existe $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ biyectiva con $f(p) = q$.

**P5.** Demuestre que las siguientes relaciones son de equivalencia y determine las clases de equivalencia pedidas.

(a) $\mathcal{R}$ en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dada por $(a, b)\mathcal{R}(a', b')$ ssi $a - a' = b - b'$. Determine la clase de equivalencia de $(0, n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\mathcal{R}$ en $\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ dada por $(a, b)\mathcal{R}(a', b')$ ssi $ab' = a'b$. Determine la clase de equivalencia de $(-n, 3)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

(c) $\mathcal{R}$ en $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ dada por $A\mathcal{R}B$ si $A \cap \mathbb{N} = B \cap \mathbb{N}$. Determine las clases de equivalencia de $\emptyset$, $\{0, 1\}$ y $\mathbb{Z}$.