Introducción al Álgebra MA1101

Guía 8: Conjuntos Finitos

Resumen.

Fórmulas básicas: Sean A y B finitos.

- $A = \emptyset \iff |A| = 0$.
- $A \cap B = \emptyset \implies |A \cup B| = |A| + |B|$.
- $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.
- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
- $|B| < +\infty \wedge A \subseteq B \implies |A| \leq |B|$.
- $|B \setminus A| = |B| - |A \cap B|$.
- $A \subseteq B \implies |B \setminus A| = |B| - |A|$.

Principales resultados: Sean A y B conjuntos.

- Si $|B| < +\infty$, entonces
  $A \subseteq B \wedge |A| = |B| \iff A = B$.
- Si A es finito, entonces
  $\exists f : A \to B$ biyect. $\iff |B| < +\infty \wedge |A| = |B|$.
- Si B es finito, entonces
  $\exists f : A \to B$ biyect. $\iff |A| < +\infty \wedge |A| = |B|$, y
  $\exists f : A \to B$ inyect. $\implies |A| < +\infty \wedge |A| \leq |B|$.
- Si $|A| = |B| < +\infty$ y $f : A \to B$, entonces
  f inyect. $\iff f$ sobrey. $\iff f$ biyect.

Cardinalidad de conjuntos de funciones: Si $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, $|A| = k$ y $|B| = n$, entonces

- Hay n^k funciones de A en B, i.e., $|B^A| = n^k$.
- Hay $n!/(n-k)!$ funciones inyectivas de A en B.
- Si $n = k$, hay $n!$ funciones biyectivas de A en B, y ninguna si $n \neq k$.

P1. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y sean A, B conjuntos tales que $|A| = n$, $|B| = m$ y $A \cap B = \emptyset$.

(a) Encuentre una función biyectiva de $\mathcal{P}(A \cup B)$ a $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.

(b) Si se elimina la condición $A \cap B = \emptyset$, ¿sigue existiendo una función biyectiva como en (a)?

P2. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de funciones $f : \{1, ..., 5\} \to \{1, ..., 10\}$. Determine la cardinalidad de los siguientes conjuntos:

a) $\{f \in \mathcal{F} \mid f(1) = 1 \text{ y } f(2) = 2\}$.

b) $\{f \in \mathcal{F} \mid f(1) = 1 \text{ o } f(2) = 2\}$.

c) $\{f \in \mathcal{F} \mid f(1) \neq 1 \text{ y } f(2) \neq 2\}$.

P3. Para $i \in \mathbb{N}^*$, se definen $A_i = \{i\}$ y $B_i = \{1, 2, 3, \ldots, i\}$. Determine, en función de n las siguientes cardinalidades:

(a) i) $|\bigcup_{i=1}^n A_i|$ y $|\bigcup_{i=1}^n B_i|$.

ii) $|\bigcup_{i=1}^n (A_i \times B_n)|$.

iii) $|\bigcup_{i=1}^n (A_i \times B_i)|$.

iv) $|(\bigcup_{i=1}^n A_i) \times B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n|$.

v) $|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n|$.

(b) Entre los siguientes pares de conjuntos, encuentre una función biyectiva o muestre que no existe tal función.

i) $\bigcup_{i=1}^n (A_i \times B_n)$ y B_{n^2}.

ii) $\bigcup_{i=1}^n (A_i \times B_i)$ y $\bigcup_{i=1}^n B_i$.