Introducción al Álgebra MA1101

Guía 9: Coeficientes Binomiales

Resumen.

Fórmulas básicas: Sean $0 \le k \le n$.

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- Triángulo de Pascal: $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

Binomio de Newton: Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$.

- $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$.

P1. Sean $\ell, k, n \in \mathbb{N}$ tales que $0 \le \ell < k \le n$.

(a) Pruebe que $\binom{n}{k} = \binom{n}{\ell} \iff k + \ell = n$.

(b) Pruebe que $\binom{n}{n-\ell} + \binom{n}{\ell+1} = \binom{n+1}{n-\ell}$.

(c) Pruebe que $\binom{n+1}{n-1} + 1 = \binom{n-1}{2} + 2n$.

(d) Pruebe la igualdad $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ y úsela para calcular $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ para $p \in \mathbb{R}$.

P2. Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$. Pruebe por inducción en m que $\sum_{i=0}^{m} \binom{n-1+i}{i} = \binom{n+m}{m}$.

P3. Sea $n \in \mathbb{N}$.

(a) Pruebe que $\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} \binom{n}{i}\binom{i}{j} = 3^n$.

(b) Use la parte anterior para concluir que

$$\mathcal{C} = \{(C_1, C_2, C_3) \subseteq \mathbb{N}^3 \mid C_1 \cup C_2 \cup C_3 = \{1, 2, \ldots, n\} \wedge C_1 \cap C_2 = C_1 \cap C_3 = C_2 \cap C_3 = \emptyset\},$$

entonces $|\mathcal{C}| = 3^n$.