Introducción al Álgebra MA1101

Guía 14: Complejos y Polinomios I

P1) (a) Demuestre que las raíces en $\mathbb{C}$ de la ecuación de segundo grado $z^2+z+1=0$, son las raíces cúbicas de la unidad, distintas de 1.

(b) Sea $z \in \mathbb{C}$ una raíz cúbica de la unidad, con $z \neq 1$. Pruebe que

$$(1+z)^3 + (1+z^2)^9 + (1+z^3)^6 = 62.$$

P2) (a) Sea $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, y sea $z \in \mathbb{C}$. Pruebe que el producto de las raíces n-ésimas de z es $(-1)^{n-1}z$.

(b) Sea $\rho = e^{i\cdot\frac{2\pi}{5}} \in \mathbb{C}$. Demuestre que $(1-\rho)\cdot(1-\rho^2)\cdot(1-\rho^3)\cdot(1-\rho^4) = 5$.

P3) (a) Encuentre un polinomio $P \in \mathbb{R}[x]$ de grado menor o igual a 2 tal que

$$P(0)=0, \quad P(-1)=i, \quad P(2)=\sqrt{2}.$$

¿Se puede tomar P de grado menor o igual a 1?

(b) Misma pregunta que en a), pero ahora busque un polinomio mónico P de grado 3.

(c) Encuentre $a, b, c \in \mathbb{R}$ de modo que

$$3x^2+2x-1 = (ax+b)(x+c), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

P4) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y considere el polinomio $P(x) = x^4 + 2ax^3 + bx^2 + 2x + 1$. ¿Para qué valores de a y b el polinomio P es un cuadrado perfecto?

<u>Nota</u>: Aquí decimos que P es un cuadrado perfecto si existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tal que $P(x) = Q(x)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

<u>Indicación</u>: ¿Cuál debería ser el grado de Q?