



Guía de Ejercicios C2

Parte 1

P1. Considere la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x \ln(x^2) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

- Estudie la derivabilidad de f , calcule f' donde f sea derivable y encuentre todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f'(\bar{x}) = 0$.
- Encuentre los intervalos (si los hay) donde f es creciente y donde es decreciente. Indique (si los hay) cuáles son los puntos de mínimos y máximos, locales y globales, de f .
- Determine dónde f es dos veces derivable, calcule f'' allí, y calcule todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f''(\bar{x}) = 0$.
- Determine los intervalos donde f es convexa y donde es cóncava (si los hay).

P2. Considere la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^3 e^x.$$

- Estudie la derivabilidad de f , calcule f' donde f sea derivable y encuentre todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f'(\bar{x}) = 0$.
- Encuentre los intervalos (si los hay) donde f es creciente y donde es decreciente. Indique (si los hay) cuáles son los puntos de mínimos y máximos, locales y globales, de f .
- Determine dónde f es dos veces derivable, calcule f'' allí, y calcule todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f''(\bar{x}) = 0$.
- Determine los intervalos donde f es convexa y donde es cóncava (si los hay).

P3. Considere la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}.$$

- Estudie la derivabilidad de f , calcule f' donde f sea derivable y encuentre todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f'(\bar{x}) = 0$.
- Encuentre los intervalos (si los hay) donde f es creciente y donde es decreciente. Indique (si los hay) cuáles son los puntos de mínimos y máximos, locales y globales, de f .
- Determine dónde f es dos veces derivable, calcule f'' allí, y calcule todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f''(\bar{x}) = 0$.
- Determine los intervalos donde f es convexa y donde es cóncava (si los hay).

P4. Considere la función $f: \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 2}.$$

- Estudie la derivabilidad de f , calcule f' donde f sea derivable y encuentre todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f'(\bar{x}) = 0$.
- Encuentre los intervalos (si los hay) donde f es creciente y donde es decreciente. Indique (si los hay) cuáles son los puntos de mínimos y máximos, locales y globales, de f .

- c) Determine dónde f es dos veces derivable, calcule f'' allí, y calcule todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f''(\bar{x}) = 0$.
d) Determine los intervalos donde f es convexa y donde es cóncava (si los hay).

P5. Considere la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \operatorname{sen}^3(x).$$

- a) Estudie la derivabilidad de f , calcule f' donde f sea derivable y encuentre todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f'(\bar{x}) = 0$.
b) Encuentre los intervalos (si los hay) donde f es creciente y donde es decreciente. Indique (si los hay) cuáles son los puntos de mínimos y máximos, locales y globales, de f .
c) Determine dónde f es dos veces derivable, calcule f'' allí, y calcule todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f''(\bar{x}) = 0$.
Indicación: Puede serle útil usar que $2 \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2}(1 + 3 \cos(2x))$.
d) Determine los intervalos donde f es convexa y donde es cóncava (si los hay).

P6. Considere la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1. \end{cases}$$

El objetivo de este problema es demostrar por inducción que f es infinitamente derivable, pero que su polinomio de Taylor (de cualquier orden) no es una buena aproximación de f . Para esto, se propone el siguiente esquema:

- a) Muestre por inducción que, para todo $k \in \mathbb{N}$ y $x \in (-1, 1)$, se cumple que

$$f^{(k)}(x) = \frac{P_k(x)}{(1-x^2)^{2k}} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right)$$

donde $P_k(x)$ es un polinomio que satisface la siguiente recurrencia para todo $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$P_0(x) = 1, \quad P_k(x) = 2((2k-1)x - 2kx^3)P_{k-1}(x) + (1-x^2)^2 P'_{k-1}(x).$$

- b) Muestre por inducción que, para todo $k \in \mathbb{N}$ y $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, se cumple que $f^{(k)}(x) = 0$.
c) Muestre, por definición, que $f^{(k)}$ es derivable en ± 1 para todo $k \in \mathbb{N}$. Concluya que

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \frac{P_k(x)}{(1-x^2)^{2k}} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1. \end{cases}$$

- d) Calcule el polinomio de Taylor T_f^k de orden k de f en torno a $\bar{x} = 1$ y muestre que no aproxima bien el valor de $f(x)$ para $x = 0$ en el sentido de que $\lim_{k \rightarrow \infty} T_f^k(x - \bar{x}) \not\rightarrow f(x)$.

P7. Considere la función $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$.

- a) Encuentre el polinomio de Taylor $T_f^1(x - \bar{x})$ de orden 1 de f en torno a $\bar{x} = 9$.
b) Demuestre que el error de la aproximación de f por T_f^1 en el intervalo $[9, 10]$ es menor que 10^{-2} , es decir, demuestre que $|f(x) - T_f^1(x - \bar{x})| \leq 10^{-2}$ para todo $x \in [9, 10]$.

P8. Considere la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos(x)$.

- a) Encuentre el polinomio de Taylor $T_f^7(x - \bar{x})$ de orden 7 de f en torno a $\bar{x} = 0$.
b) Demuestre que el error de la aproximación de f por T_f^7 en el intervalo $[0, 2]$ es menor que 10^{-2} , es decir, demuestre que $|f(x) - T_f^7(x - \bar{x})| \leq 10^{-2}$ para todo $x \in [0, 2]$.

- c) Use la parte anterior para dar una aproximación de $\cos(1)$ y de $\cos(2)$, demostrando que el primer decimal de la aproximación es correcto.

P9. Para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sea

$$S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

El objetivo de este problema es demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \ln(2)$. Para esto, siga el siguiente esquema.

- a) Considere la función $f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \ln(1+x)$. Pruebe que f es infinitas veces derivable en todo su dominio mostrando por inducción que

$$f^{[k]}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k},$$

para todo $k \geq 1$.

- b) Calcule el desarrollo de Taylor de orden n de f en torno a $\bar{x} = 0$, es decir, calcule $T_f^n(x)$.

- c) Muestre que, para todo $x > 0$, se tiene que $f(x) = T_f^n(x) + R_{n+1}(x)$, donde

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\xi_n)^{n+1}} x^{n+1},$$

con algún $\xi_n \in (0, x)$.

- d) Demuestre que $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_{n+1}(1)| = 0$. Concluya el resultado tomando $x = 1$ en la igualdad de la parte anterior.

P10. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función infinitamente derivable. Suponga que $|f^{(k)}(x)| \leq 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$.

Sea $\bar{x} \in \mathbb{R}$ fijo. Demuestre que, para todo $x \in [x_0 - 1, x_0 + 1]$, se cumple que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |f(x) - T_f^k(x - \bar{x})| = 0,$$

donde $T_f^k(x - \bar{x})$ denota el polinomio de Taylor de orden k en torno a \bar{x} .

P11. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ una función derivable y tal que es una primitiva de sí misma. Sea $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \ln(f(x))$.

- a) Demuestre que $g'(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
 b) Concluya que existe $A > 0$ tal que $f(x) = Ae^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

P12. Calcule las siguientes primitivas:

- | | | |
|--|---|--|
| 1. $\int (3x^2 + 2x + 1) dx$ | 2. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ | 3. $\int \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{x})^4}{\sqrt{ax}} dx$ |
| 4. $\int (x+2) \operatorname{sen}(x^2 + 4x - 6) dx$ | 5. $\int \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 3} dx$ | 6. $\int \operatorname{sen}^2(x) \cos^3(x) dx$ |
| 7. $\int \operatorname{arc} \cos(2x) dx$ | 8. $\int \frac{\operatorname{arc} \operatorname{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$ | 9. $\int \frac{1}{\sqrt{2+3x-2x^2}} dx$ |
| 10. $\int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$ | 11. $\int \frac{1}{4 + \sqrt{x}} dx$ | 12. $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$ |
| 13. $\int \sec(x) dx$ | 14. $\int \operatorname{sen}(\sqrt{x}) dx$ | 15. $\int e^x \sqrt{e^{2x} + 1} dx$ |
| 16. $\int x^3 (\ln(x))^2 dx$ | 17. $\int \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} dx$ | 18. $\int e^{\sqrt{x}} \cos(\sqrt{x}) dx$ |
| 19. $\int (\operatorname{arc} \operatorname{sen}(x))^2 dx$ | 20. $\int x^3 \sqrt{5 - 2x^2} dx$ | 21. $\int x^3 e^{x^2} dx$ |

$$22. \int \frac{x^5}{(2+x^2)^{3/2}} dx$$

$$25. \int \frac{x}{1+x^3} dx$$

$$28. \int \frac{x^2}{(1+x^2)(1-x)^2} dx$$

$$31. \int \frac{1}{2+3\cos(x)} dx$$

$$23. \int \frac{x^5}{(2-x^2)^{3/2}} dx$$

$$26. \int \frac{x^4}{1+x^2} dx$$

$$29. \int \frac{x^2+x}{(1+x+x^2)(2-x)} dx$$

$$32. \int \frac{1}{1+2\tan(x)} dx$$

$$24. \int \frac{x^5}{(x^2-2)^{3/2}} dx$$

$$27. \int \frac{x^5}{(x-1)^2(1+x^2)} dx$$

$$30. \int \frac{1}{\cos(x)+\sin(x)+2} dx$$

$$33. \int \frac{\cos(x)}{(1-\cos(x))^2} dx \quad 5$$

P13. Calcule $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx$, suponiendo que $a > 0$ y que $b^2 - 4ac < 0$.

Indicación: Puse serle útil completar el cuadrado.

P14. Calcule $I = \int \sec^3(x) dx$ mediante los siguientes dos métodos distintos:

- Integrando por partes usando $u = \sec(x)$ y $v' = \sec^2(x)$, y luego despejando I de la ecuación que resulta.
- Escribiendo

$$\sec^3(x) = \frac{\cos(x)}{(1-\sin^2(x))^2},$$

y luego haciendo el cambio de variable $u = \sin(x)$.

P15. Para $a > 0$ y $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ considere

$$I_n = \int \frac{1}{(a^2+u^2)^n} du.$$

Integrando por partes adecuadamente, muestre que, para cada $n \geq 2$, se tiene que

$$I_n = \int \frac{1}{(a^2+u^2)^n} du = \frac{u}{2a^2(n-1)(a^2+u^2)^{n-1}} + \left(\frac{2n-3}{2a^2(n-1)} \right) I_{n-1}.$$

Use lo anterior para calcular I_2 e I_3 explícitamente.

P16. Para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, considere

$$I_n = \int \sin^n x dx.$$

Integrando por partes adecuadamente, muestre que, para cada $n \geq 3$,

$$I_n = \left(-\frac{1}{n} \right) \sin^{n-1} x \cos x + \left(\frac{n-1}{n} \right) I_{n-2}.$$

P17. Para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, considere

$$I_n = \int e^x \cos^n x dx.$$

Integrando por partes adecuadamente, muestre que, para cada $n \geq 3$,

$$I_n = \left(\frac{1}{1+n^2} \right) e^x (\cos x - n \sin x) \cos^{n-1} x + \left(\frac{n(n-1)}{1+n^2} \right) I_{n-2}.$$

P18. Para $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, considere

$$I_n = \int t^m \ln^n t dt.$$

Integrando por partes adecuadamente, muestre que, para cada $n \geq 2$,

$$I_n = \frac{t^{m+1} \ln^n t}{m+1} - \left(\frac{n}{m+1} \right) I_{n-1}.$$

Parte 2

P19. Sean $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones escalonadas. Muestre que

- $f + g$ es una función escalonada.
- fg es una función escalonada.
- $|f|$ es una función escalonada.
- $f \circ g$ es una función escalonada.
- $\max\{f, g\}$ y $\min\{f, g\}$ son funciones escalonadas.

P20. Dado $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, se define el conjunto $P_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ por $x_i = 10^i$ para todo $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

- Argumente que P_n es una partición del conjunto $[1, 10^n]$.
- Pruebe que $f: [1, 10^n] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \lceil \log(x) \rceil$ es escalonada.

Indicación: La función \log denota el logaritmo en base 10.

- Determine el valor de $\int_1^{10^n} f$.

P21. Sea $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$. Para $n \in \mathbb{N}$, considere una partición equiespaciada $P_n = \{x_0, \dots, x_n\}$ del intervalo $[0, 1]$, esto es, $x_i = \frac{i}{n}$ para $i \in \{0, \dots, n\}$.

Sean $f_-, f_+: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones escalonadas asociadas a la partición P_n definidas por

$$f_-(x) = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{y} \quad f_+(x) = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ y $x \in (x_{i-1}, x_i)$, e iguales a $f(x_i)$ en cada punto x_i de la partición P_n .

- Pruebe que

$$\int_0^1 f_- = (e - 1) \cdot \left(\frac{1/n}{e^{1/n} - 1} \right) \quad \text{y} \quad \int_0^1 f_+ = (e - 1) \cdot e^{1/n} \cdot \left(\frac{1/n}{e^{1/n} - 1} \right).$$

Indicación: Recuerde la suma geométrica: $\sum_{j=\ell}^m r^j = \frac{r^{m+1} - r^\ell}{r - 1}$ para todo $\ell, m \in \mathbb{N}$ con $\ell \leq m$ y $r \neq 1$.

- Justifique que f es Riemann integrable en $[0, 1]$ y pruebe que $f_- \in \mathcal{E}_-(f)$ y $f_+ \in \mathcal{E}_+(f)$. Use los resultados previos para calcular la integral $\int_0^1 f$.

P22. Sea $a \in \mathbb{N}$ fijo. Se define $f: [1, a] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \notin \mathbb{N}, \\ x & \text{si } x \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

- Para $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ con $k < a$, demuestre que f es Riemann integrable en $[k, k + 1]$.
- Concluya que f es Riemann integrable en $[1, a]$.

P23. Considere una sucesión acotada (a_k) de números reales. Se define la función $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} a_k & \text{si existe } k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ tal que } x \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right] \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- Muestre que f es acotada.
- Determine si f es una función escalonada, ya sea demostrando que siempre lo es, o exhibiendo un ejemplo de sucesión acotada (a_k) para la que f no es escalonada.

c) Sea $a = \sup\{|a_k| : k \in \mathbb{N}\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere las funciones $f_+^n, f_-^n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f_+^n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \left(\frac{1}{n+1}, 1\right], \\ a & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n+1}\right]; \end{cases} \quad f_-^n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \left(\frac{1}{n+1}, 1\right], \\ -a & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n+1}\right]. \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, justifique que f_+^n y f_-^n son funciones escalonadas y calcule $\int_0^1 f_+^n$ y $\int_0^1 f_-^n$ en términos de la sucesión (a_k) y de a .

d) Demuestre que $f_-^n(x) \leq f(x) \leq f_+^n(x)$ para todo $x \in [0, 1]$. Concluya que $f_+^n \in \mathcal{E}_+(f)$ y que $f_-^n \in \mathcal{E}_-(f)$.

e) Muestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 f_+^n - \int_0^1 f_-^n \right) = 0.$$

Usando lo anterior, concluya que f es Riemann integrable..

P24. Sea $f : [a, b] \rightarrow (0, +\infty)$ una función Riemann integrable. El objetivo de este problema es demostrar que la función $g : [a, b] \rightarrow (0, +\infty)$ dada por $g(x) = (f(x))^2$ también es Riemann integrable. Para esto, siga el siguiente esquema.

a) Justifique que g es acotada.

b) Sean $\varepsilon > 0$ y $s = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Muestre que existen funciones escalonadas $f_+, f_- : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que a la vez cumplen que

$$0 \leq f_-(x) \leq f(x) \leq f_+(x) \leq s$$

y que

$$\int_0^1 f_+ - \int_0^1 f_- \leq \varepsilon.$$

c) Considere las funciones $g_-, g_+ : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $g_-(x) = (f_-(x))^2$ y $g_+(x) = (f_+(x))^2$. Justifique que g_+ y g_- son funciones escalonadas tales que $g_-(x) \leq g(x) \leq g_+(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Concluya que $g_- \in \mathcal{E}_-(g)$ y que $g_+ \in \mathcal{E}_+(g)$.

d) Muestre que

$$\int_0^1 g_+ - \int_0^1 g_- \leq 2s\varepsilon$$

y concluya que g es Riemann integrable.

Indicación: Observe que

$$g_+(x) - g_-(x) = (f_+(x) + f_-(x))(f_+(x) - f_-(x)) \leq 2s(f_+(x) - f_-(x))$$

para todo $x \in [a, b]$.

e) Si $\alpha \in \mathbb{R}$, ¿es posible replicar lo anterior para la función $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = (f(x))^\alpha$?

P25. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann integrable. Muestre que existen funciones escalonadas $f_-^n, f_+^n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$f_-^n(x) \leq f_-^{n+1}(x) \leq f(x) \leq f_+^{n+1}(x) \leq f_+^n(x), \text{ para todo } x \in [a, b],$$

y tales que $\left(\int_a^b f_-^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente que converge a $\int_a^b f$, y $\left(\int_a^b f_+^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente que converge a $\int_a^b f$.

Indicación: Observe que, si $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones escalonadas, entonces $\max\{f, g\}$ y $\min\{f, g\}$ también son funciones escalonadas.

P26. Considere la función $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0, 1], \\ 1 & \text{si } x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Encuentre $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y funciones escalonadas $f^-, f^+: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ asociadas a la partición $P = \{\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n}, 2\}$ tales que

$$\int_0^2 (f^+ - f^-) \leq 10^{-3}.$$

P27. Sea $q \in (0, 1)$. Considere la sucesión (a_n) definida por $a_n = \int_0^n q^x dx$.

- Justifique que (a_n) está bien definida, en el sentido de que cada integral existe, y que es estrictamente creciente.
- Para $n \in \mathbb{N}$ fijo, considere la partición $P_n = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ del intervalo $[1, n]$. Usando funciones escalonadas apropiadas pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$q \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \leq a_n \leq \frac{1}{1 - q}.$$

- Concluya que (a_n) converge y que su límite a satisface que

$$\frac{q}{1 - q} \leq a \leq \frac{1}{1 - q}.$$

P28. Sea $f: [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ una función creciente.

- Justifique que f está acotada en el intervalo $[1, n]$, para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
- Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ fijo. Usando la partición $P_n = \{1, 2, \dots, n\}$ del intervalo $[1, n]$ y funciones escalonadas apropiadas asociadas a P_n , pruebe que

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{i=2}^n f(i).$$

- Suponga ahora que $f(x) = \ln(x)$. Usando que $\int_1^n \ln(x) dx = n \ln(n) + 1 - n$, demuestre que

$$(n - 1)! \leq n^n e^{1-n} \leq n!.$$