Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Cálculo Diferencial e Integral MA1002-2024-1

Guía de Ejercicios C2

P1. Considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x\ln(x^2) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

a) Estudie la derivabilidad de f, calcule f' donde f sea derivable y encuentre todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f'(\bar{x}) = 0$.

b) Encuentre los intervalos (si los hay) donde f es creciente y donde es decreciente. Indique (si los hay) cuáles son los puntos de mínimos y máximos, locales y globales, de f.

c) Determine dónde f es dos veces derivable, calcule f'' allí, y calcule todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f''(\bar{x}) = 0$.

d) Determine los intervalos donde f es convexa y donde es cóncava (si los hay).

P2. Considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^3 e^x.$$

a) Estudie la derivabilidad de f, calcule f' donde f sea derivable y encuentre todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f'(\bar{x}) = 0$.

b) Encuentre los intervalos (si los hay) donde f es creciente y donde es decreciente. Indique (si los hay) cuáles son los puntos de mínimos y máximos, locales y globales, de f.

c) Determine dónde f es dos veces derivable, calcule f'' allí, y calcule todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f''(\bar{x}) = 0$.

d) Determine los intervalos donde f es convexa y donde es cóncava (si los hay).

P3. Considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}.$$

a) Estudie la derivabilidad de f, calcule f' donde f sea derivable y encuentre todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f'(\bar{x}) = 0$.

b) Encuentre los intervalos (si los hay) donde f es creciente y donde es decreciente. Indique (si los hay) cuáles son los puntos de mínimos y máximos, locales y globales, de f.

c) Determine dónde f es dos veces derivable, calcule f'' allí, y calcule todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f''(\bar{x}) = 0$.

d) Determine los intervalos donde f es convexa y donde es cóncava (si los hay).

P4. Considere la función $f\colon \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-2}.$$

a) Estudie la derivabilidad de f, calcule f' donde f sea derivable y encuentre todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f'(\bar{x}) = 0$.

b) Encuentre los intervalos (si los hay) donde f es creciente y donde es decreciente. Indique (si los hay) cuáles son los puntos de mínimos y máximos, locales y globales, de f.

c) Determine dónde f es dos veces derivable, calcule f'' allí, y calcule todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f''(\bar{x}) = 0$.

d) Determine los intervalos donde f es convexa y donde es cóncava (si los hay).

P5. Considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \operatorname{sen}^3(x).$$

a) Estudie la derivabilidad de f, calcule f' donde f sea derivable y encuentre todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f'(\bar{x}) = 0$.

b) Encuentre los intervalos (si los hay) donde f es creciente y donde es decreciente. Indique (si los hay) cuáles son los puntos de mínimos y máximos, locales y globales, de f.

c) Determine dónde f es dos veces derivable, calcule f'' allí, y calcule todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f''(\bar{x}) = 0$.
Indicación: Puede serle útil usar que $2\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2}(1 + 3\cos(2x))$.

d) Determine los intervalos donde f es convexa y donde es cóncava (si los hay).

P6. Considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{1-x^2}\right) & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1. \end{cases}$$

El objetivo de este problema es demostrar por inducción que f es infinitamente derivable, pero que su polinomio de Taylor (de cualquier orden) no es una buena aproximación de f. Para esto, se propone el siguiente esquema:

a) Muestre por inducción que, para todo $k \in \mathbb{N}$ y $x \in (-1, 1)$, se cumple que

$$f^{(k)}(x) = \frac{P_k(x)}{(1-x^2)^{2k}} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right)$$

donde $P_k(x)$ es un polinomio que satisface la siguiente recurrencia para todo $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$P_0(x) = 1, \qquad P_k(x) = 2((2k-1)x - 2kx^3)P_{k-1}(x) + (1-x^2)^2 P'_{k-1}(x).$$

b) Muestre por inducción que, para todo $k \in \mathbb{N}$ y $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, se cumple que $f^{(k)}(x) = 0$.

c) Muestre, por definición, que $f^{(k)}$ es derivable en ± 1 para todo $k \in \mathbb{N}$. Concluya que

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \dfrac{P_k(x)}{(1-x^2)^{2k}} \exp\left(-\dfrac{1}{1-x^2}\right) & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1. \end{cases}$$

d) Calcule el polinomio de Taylor T_f^k de orden k de f en torno a $\bar{x} = 1$ y muestre que no aproxima bien el valor de $f(x)$ para $x = 0$ en el sentido de que $\lim\limits_{k\to\infty} T_f^k(x - \bar{x}) \not\to f(x)$.

P7. Considere la función $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$.

a) Encuentre el polinomio de Taylor $T_f^1(x - \bar{x})$ de orden 1 de f en torno a $\bar{x} = 9$.

b) Demuestre que el error de la aproximación de f por T_f^1 en el intervalo $[9, 10]$ es menor que 10^{-2}, es decir, demuestre que $|f(x) - T_f^1(x - \bar{x})| \leq 10^{-2}$ para todo $x \in [9, 10]$.

P8. Considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos(x)$.

a) Encuentre el polinomio de Taylor $T_f^7(x - \bar{x})$ de orden 7 de f en torno a $\bar{x} = 0$.

b) Demuestre que el error de la aproximación de f por T_f^7 en el intervalo $[0, 2]$ es menor que 10^{-2}, es decir, demuestre que $|f(x) - T_f^7(x - \bar{x})| \leq 10^{-2}$ para todo $x \in [0, 2]$.

c) Use la parte anterior para dar una aproximación de $\cos(1)$ y de $\cos(2)$, demostrando que el primer decimal de la aproximación es correcto.

P9. Para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sea
$$S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$
El objetivo de este problema es demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \ln(2)$. Para esto, siga el siguiente esquema.

a) Considere la función $f\colon (-1,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \ln(1+x)$. Pruebe que f es infinitas veces derivable en todo su dominio mostrando por inducción que
$$f^{[k]}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k},$$
para todo $k \geq 1$.

b) Calcule el desarrollo de Taylor de orden n de f en torno a $\bar{x} = 0$, es decir, calcule $T_f^n(x)$.

c) Muestre que, para todo $x > 0$, se tiene que $f(x) = T_f^n(x) + R_{n+1}(x)$, donde
$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\xi_n)^{n+1}} x^{n+1},$$
con algún $\xi_n \in (0,x)$.

d) Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} |R_{n+1}(1)| = 0$. Concluya el resultado tomando $x = 1$ en la igualdad de la parte anterior.

P10. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función infinitamente derivable. Suponga que $|f^{(k)}(x)| \leq 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$. Sea $\bar{x} \in \mathbb{R}$ fijo. Demuestre que, para todo $x \in [x_0 - 1, x_0 + 1]$, se cumple que
$$\lim_{k\to\infty} |f(x) - T_f^k(x - \bar{x})| = 0,$$
donde $T_f^k(x-\bar{x})$ denota el polinomio de Taylor de orden k en torno a $\bar{x}$.

P11. Sea $f\colon \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ una función derivable y tal que es una primitiva de sí misma. Sea $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \ln(f(x))$.

a) Demuestre que $g'(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

b) Concluya que existe $A > 0$ tal que $f(x) = Ae^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

P12. Cálcule las siguientes primitivas:

1. $\int (3x^2 + 2x + 1)\,\mathrm{d}x$	2. $\int \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\,\mathrm{d}x$	3. $\int \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{x})^4}{\sqrt{ax}}\,\mathrm{d}x$
4. $\int (x+2)\operatorname{sen}(x^2 + 4x - 6)\,\mathrm{d}x$	5. $\int \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 3}\,\mathrm{d}x$	6. $\int \operatorname{sen}^2(x)\cos^3(x)\,\mathrm{d}x$
7. $\int \arccos(2x)\,\mathrm{d}x$	8. $\int \frac{\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$	9. $\int \frac{1}{\sqrt{2 + 3x - 2x^2}}\,\mathrm{d}x$
10. $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\mathrm{d}x$	11. $\int \frac{1}{4 + \sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$	12. $\int \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$
13. $\int \sec(x)\,\mathrm{d}x$	14. $\int \operatorname{sen}(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$	15. $\int e^x\sqrt{e^{2x} + 1}\,\mathrm{d}x$
16. $\int x^3\big(\ln(x)\big)^2\,\mathrm{d}x$	17. $\int \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt{x} + 1}\,\mathrm{d}x$	18. $\int e^{\sqrt{x}}\cos(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$
19. $\int \big(\operatorname{arc\,sen}(x)\big)^2\,\mathrm{d}x$	20. $\int x^3\sqrt{5 - 2x^2}\,\mathrm{d}x$	21. $\int x^3 e^{x^2}\,\mathrm{d}x$
22. $\int \frac{x^5}{(2 + x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$	23. $\int \frac{x^5}{(2 - x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$	24. $\int \frac{x^5}{(x^2 - 2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$

25. $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$ 26. $\displaystyle\int \frac{x^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 27. $\displaystyle\int \frac{x^5}{(x-1)^2(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$

28. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1+x^2)(1-x)^2}\,\mathrm{d}x$ 29. $\displaystyle\int \frac{x^2+x}{(1+x+x^2)(2-x)}\,\mathrm{d}x$ 30. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos(x)+\operatorname{sen}(x)+2}\,\mathrm{d}x$

31. $\displaystyle\int \frac{1}{2+3\cos(x)}\,\mathrm{d}x$ 32. $\displaystyle\int \frac{1}{1+2\tan(x)}\,\mathrm{d}x$ 33. $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{(1-\cos(x))^2}\,\mathrm{d}x$

P13. Calcule $\displaystyle\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$, suponiendo que $a>0$ y que $b^2-4ac<0$.

Indicación: Puse serle útil completar el cuadrado.

P14. Calcule $I=\displaystyle\int \sec^3(x)\,\mathrm{d}x$ mediante los siguientes dos métodos distintos:

- Integrando por partes usando $u=\sec(x)$ y $v'=\sec^2(x)$, y luego despejando I de la ecuación que resulta.
- Escribiendo
$$\sec^3(x)=\frac{\cos(x)}{(1-\operatorname{sen}^2(x))^2},$$
y luego haciendo el cambio de variable $u=\operatorname{sen}(x)$.

P15. Para $a>0$ y $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ considere
$$I_n=\int \frac{1}{(a^2+u^2)^n}\,\mathrm{d}u.$$
Integrando por partes adecuadamente, muestre que, para cada $n\geq 2$, se tiene que
$$I_n=\int \frac{1}{(a^2+u^2)^n}\,\mathrm{d}u=\frac{u}{2a^2(n-1)\,(a^2+u^2)^{n-1}}+\left(\frac{2n-3}{2a^2(n-1)}\right)I_{n-1}.$$
Use lo anterior para calcular I_2 e I_3 explícitamente.

P16. Para $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, considere
$$I_n=\int \operatorname{sen}^n x\,\mathrm{d}x.$$
Integrando por partes adecuadamente, muestre que, para cada $n\geq 3$,
$$I_n=\left(-\frac{1}{n}\right)\operatorname{sen}^{n-1}x\,\cos x+\left(\frac{n-1}{n}\right)I_{n-2}.$$

P17. Para $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, considere
$$I_n=\int e^x\cos^n x\,\mathrm{d}x.$$
Integrando por partes adecuadamente, muestre que, para cada $n\geq 3$,
$$I_n=\left(\frac{1}{1+n^2}\right)e^x(\cos x-n\operatorname{sen}x)\cos^{n-1}x+\left(\frac{n(n-1)}{1+n^2}\right)I_{n-2}.$$

P18. Para $n,m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, considere
$$I_n=\int t^m\ln^n t\,\mathrm{d}t.$$
Integrando por partes adecuadamente, muestre que, para cada $n\geq 2$,
$$I_n=\frac{t^{m+1}\ln^n t}{m+1}-\left(\frac{n}{m+1}\right)I_{n-1}.$$