Guía de Ejercicios C1

P1. Considere la sucesión definida por la siguiente recurrencia:

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = 1, \qquad x_n = \frac{1}{3}x_{n-1} + \frac{2}{3}x_{n-2} \quad \text{para todo } n \geq 2.$$

Pruebe que esta sucesión posee al menos una subsucesión convergente.

P2. Demuestre que existen infinitos $x \in \mathbb{R}$ tales que $\tan(x) = \cos(x)$.

P3. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Suponga que f es T-periodica, es decir, que satisface $f(x+T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que f es acotada y que alcanza su mínimo y su máximo.

Indicación: Comience mostrando que, para todo $n \in \mathbb{Z}$ y para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que $f(x) = f(x+nT)$.

P4. Demuestre que la función $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \ln(x)$ *no* es uniformemente continua.

P5. Para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, considere el polinomio $P_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $P_n(x) = x^n + x - 1$.

a) Pruebe que, para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, P_n tiene una única raíz positiva. Sea $r_n > 0$ esta raíz.

b) Demuestre que la sucesión (r_n) tiene una subsucesión convergente.

P6. Considere la función $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-x)}{\ln(1+x)} & \text{si } x \in (-1,0) \cup (0,1), \\ -1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

a) Demuestre que f es continua y derivable en $\bar{x} = 0$, y calcule $f'(0)$.

b) Justifique que f es derivable en todo su dominio y calcule su derivada.

P7. Sea $V > 0$. De entre todos los cilindros con volumen V, encuentre el radio basal, la altura y la superficie de aquel que tiene la menor superficie.

Indicación: Recuerde que si un cilindro posee radio basal $r > 0$ y altura $h > 0$, su volumen se calcula como $\pi r^2 h$, y su superficie se calcula como $2\pi r h + 2\pi r^2$.

P8. Sea $P > 0$. De entre todos los triángulos con perímetro $2P$, determine las dimensiones de aquel que tiene área máxima.

Indicación: Recuerde que si un triángulo posee lados $a, b, c > 0$, entonces la fórmula de Herón establece que su área está dada por $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, donde $s = \dfrac{a+b+c}{2}$. Además, comience justificando que maximizar el área de un triángulo es equivalente a maximizar el cuadrado de su área.

P9. Considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{1 + 2|x-3|}.$$

Determine todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ en los que f es derivable, y calcule su derivada allí.

P10. Considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \exp\left(\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) & \text{si } x \neq 0, \\ \alpha & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

a) Demuestre que f es continua en $\bar{x} = 0$ si y sólo si $\alpha = 0$.

Desde ahora suponga que $\alpha = 0$.

b) Demuestre que f es derivable en todo su dominio y calcule su derivada f'.

c) Demuestre que f' no es continua en $\bar{x} = 0$.
Indicación: Estudie el límite $\lim\limits_{n\to\infty} f'(x_n)$ con $x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$.

P11. Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^n \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Encuentre todos los puntos en los que f es derivable.
Indicación: Considere separadamente los casos $n = 1$ y $n > 1$.

P12. Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua.

a) Pruebe que existen a, $b \in [0,1]$ tales que, para todo $x, y \in [0,1]$,

$$f(a) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} \leq f(b).$$

b) Concluya que existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = \dfrac{f(0) + f(1)}{2}$.

P13. Sean $a \geq 0$ y $b, c, d \in \mathbb{R}$. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2 + a} - b}{x^2} & \text{si } x > 0, \\ 2 & \text{si } x = 0, \\ \dfrac{e^{cx} - 1}{x - d} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Determine los valores que deben tener a, b, c y d para que f sea continua.

P14. Sea $f\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ una función continua y suponga que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Pruebe que toda sucesión de números reales (x_n) posee al menos una subsucesión $(x_{\varphi(n)})$ tal que $f(x_{\varphi(n)})$ es convergente.
Indicación: Considere separadamente el caso en el que (x_n) es acotada, y el caso en el que no lo es.

P15. Sea $f\colon [0,1] \to [0, +\infty)$ una función continua tal que $f(0) = f(1) = 0$. Sea además $\lambda \in [0,1]$ fijo.
Demuestre que existe $c \in [0, 1 - \lambda]$ tal que

$$f(c + \lambda) = f(c).$$

P16. Para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ una función continua. Demuestre que f debe ser constante.

P17. Considere la función $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x(x-1)}.$$

a) Demuestre que f es continua.

b) Determine si los límites $\lim_{x\to 0} f(x)$ y $\lim_{x\to 1} f(x)$ existen o no.

c) ¿Existe una función $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$? Use las partes anteriores para encontrarla explícitamente o para demostrar que no existe.

P18. Considere una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que f es continua en 0.

P19. Considere la función $f\colon [-1, 1] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}\left(\frac{\arctan(x)}{x}\right).$$

a) Encuentre una función continua $g\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$.

b) Demuestre que g es uniformemente continua.

P20. Demuestre que la función $f\colon [1, +\infty)$ dada por $f(x) = \sqrt{3x + 6}$ es uniformemente continua.

P21. Sean $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones dadas por

$$f(x) = x - [x], \qquad g(x) = \operatorname{sen}(\pi f(x)), \qquad h(x) = \cos(\pi f(x)),$$

donde $[x]$ representa la parte entera de $x \in \mathbb{R}$.

a) Determine si g y h son uniformemente continuas en $\mathbb{R}$.

b) Determine si g y h son uniformemente continuas en $[0, 1)$.

P22. Para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua.

Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ fijo, y sean $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$ y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n > 0$ fijos. Demuestre por inducción que existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(c).$$

P23. Demuestre que existen infinitos $x \in \mathbb{R}$ tales que $e^x \cos(x) + 1 = 0$.

<u>Indicación:</u> Considere intervalos de la forma $[n\pi, (n + 1), \pi)$, con $n \in \mathbb{N}$.

P24. Sea $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polinomio de grado impar. Muestre que P tiene al menos una raíz real.

P25. Para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, sea $f\colon [a, b] \to (0, +\infty)$ una función continua.. Demuestre que existe $k > 0$ tal que $f(x) > k$ para todo $x \in [a, b]$.

P26. Para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, sea $f\colon [a, b] \to [0, +\infty)$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Suponga además que $f(a) = f(b) = 0$ y que $f(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$.

Sea $r \in \mathbb{R}$ fijo. Considere la función $h\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = rx - \ln(f(x))$.

Considere la función $h\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = rx - \ln(f(x))$.

a) Determine los puntos donde h es derivable.

b) Demuestre que $\lim_{x\to a^+} h(x) = \lim_{x\to b^-} h(x) = +\infty$.

c) Demuestre que h tiene un mínimo global, es decir, que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$h(c) \leq h(x) \text{ para todo } x \in (a, b).$$

d) Demuestre que existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = rf(c)$.

P27. Sea $f\colon (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ biyectiva y derivable en todo su dominio. Se tiene que f^{-1} también es derivable en todo su dominio (no lo demuestre).

Considere la función $h\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = \frac{1}{1+f^{-1}(x)}.$$

a) Justifique que h es derivable en todo su dominio.

b) Demuestre que $h'(x)f'(f^{-1}(x)) + \big(h(x)\big)^2 = 0$ para todo $x \in (0,+\infty)$.

P28. Para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, sea $f\colon [a,b] \to (0,+\infty)$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b).

Demuestre que existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \exp\left(\frac{f'(c)}{f(c)}(b-a)\right).$$

Indicación: Analice la función $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = \ln(f(x))$.

P29. Para una función $f\colon A \to \mathbb{R}$, donde $A \subseteq \mathbb{R}$, diremos que $\bar{x} \in A$ es un *punto fijo* de f si $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

a) Para $n \in \mathbb{N}$, considere la función $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = \cos^n(x)$.

  i) Pruebe que, para todo $n \in \mathbb{N}$, f_n posee al menos un punto fijo.

  ii) Sea (x_n) una sucesión tal que x_n es punto fijo de f_n para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que (x_n) posee una subsucesión convergente.

b) Para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, sea $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una función derivable en (a,b) que posee dos puntos fijos distintos $x_1, x_2 \in (a,b)$. Pruebe que existe $\xi \in (a,b)$ tal que $f'(\xi) = 1$.

c) Para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, sea $f : [a,b] \to [a,b]$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Suponga además que f es Lipschitz de constante $L \in (0,1)$, es decir, suponga que existe $L \in (0,1)$ tal que, para todo $x, y \in [0,1]$, se tiene que $|f(x) - f(y)| < L|x-y|$.

  i) Pruebe que $f'(x) < 1$ para todo $x \in (a,b)$.

  ii) Concluya que f tiene un único punto fijo.

Observación: Esta es una versión del célebre *teorema del punto fijo de Banach.*

P30. Sea $\alpha \in (0,1)$. Pruebe que, para todo $x \in [0,1]$, se cumple que

$$x^\alpha \leq \alpha x + (1-\alpha).$$

Indicación: Defina $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \alpha x - x^\alpha$ y use el teorema del valor medio.