Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Cálculo Diferencial e Integral MA1002-2024-1

Guía de Ejercicios C2

Parte 1

P1. Considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x\ln(x^2) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

a) Estudie la derivabilidad de f, calcule f' donde f sea derivable y encuentre todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f'(\bar{x}) = 0$.

b) Encuentre los intervalos (si los hay) donde f es creciente y donde es decreciente. Indique (si los hay) cuáles son los puntos de mínimos y máximos, locales y globales, de f.

c) Determine dónde f es dos veces derivable, calcule f'' allí, y calcule todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f''(\bar{x}) = 0$.

d) Determine los intervalos donde f es convexa y donde es cóncava (si los hay).

P2. Considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^3 e^x.$$

a) Estudie la derivabilidad de f, calcule f' donde f sea derivable y encuentre todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f'(\bar{x}) = 0$.

b) Encuentre los intervalos (si los hay) donde f es creciente y donde es decreciente. Indique (si los hay) cuáles son los puntos de mínimos y máximos, locales y globales, de f.

c) Determine dónde f es dos veces derivable, calcule f'' allí, y calcule todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f''(\bar{x}) = 0$.

d) Determine los intervalos donde f es convexa y donde es cóncava (si los hay).

P3. Considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}.$$

a) Estudie la derivabilidad de f, calcule f' donde f sea derivable y encuentre todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f'(\bar{x}) = 0$.

b) Encuentre los intervalos (si los hay) donde f es creciente y donde es decreciente. Indique (si los hay) cuáles son los puntos de mínimos y máximos, locales y globales, de f.

c) Determine dónde f es dos veces derivable, calcule f'' allí, y calcule todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f''(\bar{x}) = 0$.

d) Determine los intervalos donde f es convexa y donde es cóncava (si los hay).

P4. Considere la función $f\colon \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-2}.$$

a) Estudie la derivabilidad de f, calcule f' donde f sea derivable y encuentre todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f'(\bar{x}) = 0$.

b) Encuentre los intervalos (si los hay) donde f es creciente y donde es decreciente. Indique (si los hay) cuáles son los puntos de mínimos y máximos, locales y globales, de f.

c) Determine dónde f es dos veces derivable, calcule f'' allí, y calcule todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f''(\bar{x}) = 0$.

d) Determine los intervalos donde f es convexa y donde es cóncava (si los hay).

P5. Considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \operatorname{sen}^3(x).$$

a) Estudie la derivabilidad de f, calcule f' donde f sea derivable y encuentre todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f'(\bar{x}) = 0$.

b) Encuentre los intervalos (si los hay) donde f es creciente y donde es decreciente. Indique (si los hay) cuáles son los puntos de mínimos y máximos, locales y globales, de f.

c) Determine dónde f es dos veces derivable, calcule f'' allí, y calcule todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f''(\bar{x}) = 0$.
Indicación: Puede serle útil usar que $2\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) = \dfrac{1}{2}(1 + 3\cos(2x))$.

d) Determine los intervalos donde f es convexa y donde es cóncava (si los hay).

P6. Considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{1-x^2}\right) & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1. \end{cases}$$

El objetivo de este problema es demostrar por inducción que f es infinitamente derivable, pero que su polinomio de Taylor (de cualquier orden) no es una buena aproximación de f. Para esto, se propone el siguiente esquema:

a) Muestre por inducción que, para todo $k \in \mathbb{N}$ y $x \in (-1, 1)$, se cumple que

$$f^{[k]}(x) = \frac{P_k(x)}{(1-x^2)^{2k}} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right)$$

donde $P_k(x)$ es un polinomio que satisface la siguiente recurrencia para todo $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$P_0(x) = 1, \qquad P_k(x) = -2x((2k-2)x^2 - (2k-3))P_{k-1}(x) + (1-x^2)^2 P'_{k-1}(x).$$

b) Muestre por inducción que, para todo $k \in \mathbb{N}$ y $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, se cumple que $f^{[k]}(x) = 0$.

c) Muestre, por definición, que $f^{[k]}$ es derivable en ± 1 para todo $k \in \mathbb{N}$. Concluya que

$$f^{[k]}(x) = \begin{cases} \dfrac{P_k(x)}{(1-x^2)^{2k}} \exp\left(-\dfrac{1}{1-x^2}\right) & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1. \end{cases}$$

d) Calcule el polinomio de Taylor T_f^k de orden k de f en torno a $\bar{x} = 1$ y muestre que no aproxima bien el valor de $f(x)$ para $x = 0$ en el sentido de que $\lim\limits_{k\to\infty} T_f^k(x - \bar{x}) \not\to f(x)$.

P7. Considere la función $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$.

a) Encuentre el polinomio de Taylor $T_f^1(x - \bar{x})$ de orden 1 de f en torno a $\bar{x} = 9$.

b) Demuestre que el error de la aproximación de f por T_f^1 en el intervalo $[9, 10]$ es menor que 10^{-2}, es decir, demuestre que $|f(x) - T_f^1(x - \bar{x})| \leq 10^{-2}$ para todo $x \in [9, 10]$.

P8. Considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos(x)$.

a) Encuentre el polinomio de Taylor $T_f^7(x - \bar{x})$ de orden 7 de f en torno a $\bar{x} = 0$.

b) Demuestre que el error de la aproximación de f por T_f^7 en el intervalo $[0, 2]$ es menor que 10^{-2}, es decir, demuestre que $|f(x) - T_f^7(x - \bar{x})| \leq 10^{-2}$ para todo $x \in [0, 2]$.

c) Use la parte anterior para dar una aproximación de $\cos(1)$ y de $\cos(2)$, demostrando que el primer decimal de la aproximación es correcto.

P9. Para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sea

$$S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

El objetivo de este problema es demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \ln(2)$. Para esto, siga el siguiente esquema.

a) Considere la función $f\colon (-1,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \ln(1+x)$. Pruebe que f es infinitas veces derivable en todo su dominio mostrando por inducción que

$$f^{[k]}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k},$$

para todo $k \geq 1$.

b) Calcule el desarrollo de Taylor de orden n de f en torno a $\bar{x} = 0$, es decir, calcule $T_f^n(x)$.

c) Muestre que, para todo $x > 0$, se tiene que $f(x) = T_f^n(x) + R_{n+1}(x)$, donde

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\xi_n)^{n+1}} x^{n+1},$$

con algún $\xi_n \in (0, x)$.

d) Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} |R_{n+1}(1)| = 0$. Concluya el resultado tomando $x = 1$ en la igualdad de la parte anterior.

P10. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función infinitamente derivable. Suponga que $|f^{[k]}(x)| \leq 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$. Sea $\bar{x} \in \mathbb{R}$ fijo. Demuestre que, para todo $x \in [x_0 - 1, x_0 + 1]$, se cumple que

$$\lim_{k\to\infty} |f(x) - T_f^k(x - \bar{x})| = 0,$$

donde $T_f^k(x - \bar{x})$ denota el polinomio de Taylor de orden k en torno a $\bar{x}$.

P11. Sea $f\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ una función derivable y tal que es una primitiva de sí misma. Sea $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \ln(f(x))$.

a) Demuestre que $g'(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

b) Concluya que existe $A > 0$ tal que $f(x) = Ae^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

P12. Cálcule las siguientes primitivas:

1. $\displaystyle\int (3x^2 + 2x + 1)\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{x})^4}{\sqrt{ax}}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int (x+2)\operatorname{sen}(x^2 + 4x - 6)\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 3}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2(x)\cos^3(x)\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int \arccos(2x)\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2 + 3x - 2x^2}}\,\mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int \frac{1}{4 + \sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
12. $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$
13. $\displaystyle\int \sec(x)\,\mathrm{d}x$
14. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$
15. $\displaystyle\int e^x\sqrt{e^{2x} + 1}\,\mathrm{d}x$
16. $\displaystyle\int x^3\big(\ln(x)\big)^2\,\mathrm{d}x$
17. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt{x} + 1}\,\mathrm{d}x$
18. $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\cos(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$
19. $\displaystyle\int \big(\operatorname{arc\,sen}(x)\big)^2\,\mathrm{d}x$
20. $\displaystyle\int x^3\sqrt{5 - 2x^2}\,\mathrm{d}x$
21. $\displaystyle\int x^3 e^{x^2}\,\mathrm{d}x$

22. $\displaystyle\int \frac{x^5}{(2+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$

23. $\displaystyle\int \frac{x^5}{(2-x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$

24. $\displaystyle\int \frac{x^5}{(x^2-2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$

25. $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$

26. $\displaystyle\int \frac{x^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

27. $\displaystyle\int \frac{x^5}{(x-1)^2(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$

28. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1+x^2)(1-x)^2}\,\mathrm{d}x$

29. $\displaystyle\int \frac{x^2+x}{(1+x+x^2)(2-x)}\,\mathrm{d}x$

30. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos(x)+\mathrm{sen}(x)+2}\,\mathrm{d}x$

31. $\displaystyle\int \frac{1}{2+3\cos(x)}\,\mathrm{d}x$

32. $\displaystyle\int \frac{1}{1+2\tan(x)}\,\mathrm{d}x$

33. $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{(1-\cos(x))^2}\,\mathrm{d}x$ 5

P13. Calcule $\displaystyle\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$, suponiendo que $a>0$ y que $b^2-4ac<0$.

Indicación: Puse serle útil completar el cuadrado.

P14. Calcule $I = \displaystyle\int \sec^3(x)\,\mathrm{d}x$ mediante los siguientes dos métodos distintos:

- Integrando por partes usando $u=\sec(x)$ y $v'=\sec^2(x)$, y luego despejando I de la ecuación que resulta.
- Escribiendo
$$\sec^3(x) = \frac{\cos(x)}{(1-\mathrm{sen}^2(x))^2},$$
y luego haciendo el cambio de variable $u=\mathrm{sen}(x)$.

P15. Para $a>0$ y $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ considere
$$I_n = \int \frac{1}{(a^2+u^2)^n}\,\mathrm{d}u.$$
Integrando por partes adecuadamente, muestre que, para cada $n\geq 2$, se tiene que
$$I_n = \int \frac{1}{(a^2+u^2)^n}\,\mathrm{d}u = \frac{u}{2a^2(n-1)\,(a^2+u^2)^{n-1}} + \left(\frac{2n-3}{2a^2(n-1)}\right) I_{n-1}.$$
Use lo anterior para calcular I_2 e I_3 explícitamente.

P16. Para $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, considere
$$I_n = \int \mathrm{sen}^n\, x\,\mathrm{d}x.$$
Integrando por partes adecuadamente, muestre que, para cada $n\geq 3$,
$$I_n = \left(-\frac{1}{n}\right)\mathrm{sen}^{n-1} x\,\cos x + \left(\frac{n-1}{n}\right) I_{n-2}.$$

P17. Para $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, considere
$$I_n = \int e^x \cos^n x\,\mathrm{d}x.$$
Integrando por partes adecuadamente, muestre que, para cada $n\geq 3$,
$$I_n = \left(\frac{1}{1+n^2}\right) e^x(\cos x - n\,\mathrm{sen}\, x)\cos^{n-1} x + \left(\frac{n(n-1)}{1+n^2}\right) I_{n-2}.$$

P18. Para $n,m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, considere
$$I_n = \int t^m \ln^n t\,\mathrm{d}t.$$
Integrando por partes adecuadamente, muestre que, para cada $n\geq 2$,
$$I_n = \frac{t^{m+1}\ln^n t}{m+1} - \left(\frac{n}{m+1}\right) I_{n-1}.$$

Parte 2

P19. Sean $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones escalonadas. Muestre que

a) $f+g$ es una función escalonada.
b) fg es una función escalonada.
c) $|f|$ es una función escalonada.
d) $f \circ g$ es una función escalonada.
e) $\text{máx}\{f,g\}$ y $\text{mín}\{f,g\}$ son funciones escalonadas.

P20. Dado $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, se define el conjunto $P_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ por $x_i = 10^i$ para todo $i \in \{0,1,\ldots,n\}$.

a) Argumente que P_n es una partición del conjunto $[1, 10^n]$.
b) Pruebe que $f\colon\ [1,10^n] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \big[\log(x)\big]$ es escalonada.
Indicación: La función log denota el logaritmo en base 10.
c) Determine el valor de $\displaystyle\int_1^{10^n} f$.

P21. Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$. Para $n \in \mathbb{N}$, considere una partición equiespaciada $P_n = \{x_0, \ldots, x_n\}$ del intervalo $[0,1]$, esto es, $x_i = \frac{i}{n}$ para $i \in \{0,\ldots,n\}$.
Sean $f_-, f_+\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ las funciones escalonadas asociadas a la partición P_n definidas por

$$f_-(x) = \text{ínf}\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{y} \quad f_+(x) = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$ y $x \in (x_{i-1}, x_i)$, e iguales a $f(x_i)$ en cada punto x_i de la partición P_n.

a) Pruebe que

$$\int_0^1 f_- = (e-1)\cdot\left(\frac{1/n}{e^{1/n}-1}\right) \quad \text{y} \quad \int_0^1 f_+ = (e-1)\cdot e^{1/n}\cdot\left(\frac{1/n}{e^{1/n}-1}\right).$$

Indicación: Recuerde la suma geométrica: $\displaystyle\sum_{j=\ell}^{m} r^j = \frac{r^{m+1}-r^\ell}{r-1}$ para todo $\ell, m \in \mathbb{N}$ con $\ell \le m$ y $r \neq 1$.

b) Justifique que f es Riemann integrable en $[0,1]$ y pruebe que $f_- \in \mathcal{E}_-(f)$ y $f_+ \in \mathcal{E}_+(f)$. Use los resultados previos para calcular la integral $\displaystyle\int_0^1 f$.

P22. Sea $a \in \mathbb{N}$ fijo. Se define $f\colon [1,a] \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \notin \mathbb{N}, \\ x & \text{si } x \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

a) Para $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ con $k < a$, demuestre que f es Riemann integrable en $[k, k+1]$.
b) Concluya que f es Riemann integrable en $[1,a]$.

P23. Considere una sucesión acotada (a_k) de números reales. Se define la función $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} a_k & \text{si existe } k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ tal que } x \in \left(\dfrac{1}{k+1}, \dfrac{1}{k}\right] \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

a) Muestre que f es acotada.
b) Determine si f es una función escalonada, ya sea demostrando que siempre lo es, o exhibiendo un ejemplo de sucesión acotada (a_k) para la que f no es escalonada.

c) Sea $a = \sup\{|a_k| : k \in \mathbb{N}\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere las funciones $f_+^n, f_-^n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f_+^n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \left(\dfrac{1}{n+1}, 1\right], \\ a & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{n+1}\right]; \end{cases} \qquad f_-^n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \left(\dfrac{1}{n+1}, 1\right], \\ -a & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{n+1}\right]. \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, justifique que f_+^n y f_-^n son funciones escalonadas y calcule $\displaystyle\int_0^1 f_+^n$ y $\displaystyle\int_0^1 f_-^n$ en términos de la sucesión (a_k) y de a.

d) Demuestre que $f_-^n(x) \leq f(x) \leq f_+^n(x)$ para todo $x \in [0,1]$. Concluya que $f_+^n \in \mathcal{E}_+(f)$ y que $f_-^n \in \mathcal{E}_-(f)$.

e) Muestre que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_0^1 f_+^n - \int_0^1 f_-^n \right) = 0.$$

Usando lo anterior, concluya que f es Riemann integrable..

P24. Sea $f \colon [a,b] \to (0,+\infty)$ una función Riemann integrable. El objetivo de este problema es demostrar que la función $g \colon [a,b] \to (0,+\infty)$ dada por $g(x) = \big(f(x)\big)^2$ también es Riemann integrable. Para esto, siga el siguiente esquema.

a) Justifique que g es acotada.

b) Sean $\varepsilon > 0$ y $s = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$. Muestre que existen funciones escalonadas $f_+, f_- \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ que a la vez cumplen que

$$0 \leq f_-(x) \leq f(x) \leq f_+(x) \leq s$$

y que

$$\int_0^1 f_+ - \int_0^1 f_- \leq \varepsilon.$$

c) Considere las funciones $g_-, g_+ \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dadas por $g_-(x) = \big(f_-(x)\big)^2$ y $g_+(x) = \big(f_+(x)\big)^2$. Justifique que g_+ y g_- son funciones escalonadas tales que $g_-(x) \leq g(x) \leq g_+(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Concluya que $g_- \in \mathcal{E}_-(g)$ y que $g_+ \in \mathcal{E}_+(g)$.

d) Muestre que

$$\int_0^1 g_+ - \int_0^1 g_- \leq 2s\varepsilon$$

y concluya que g es Riemann integrable.

<u>Indicación:</u> Observe que

$$g_+(x) - g_-(x) = (f_+(x) + f_-(x))(f_+(x) - f_-(x)) \leq 2s(f_+(x) - f_-(x))$$

para todo $x \in [a,b]$.

e) Si $\alpha \in \mathbb{R}$, ¿es posible replicar lo anterior para la función $h \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = \big(f(x)\big)^\alpha$?

P25. Sea $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann integrable. Muestre que existen funciones escalonadas $f_-^n, f_+^n \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tales que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$f_-^n(x) \leq f_-^{n+1}(x) \leq f(x) \leq f_+^{n+1}(x) \leq f_+^n(x), \text{ para todo } x \in [a,b],$$

y tales que $\displaystyle\left(\int_a^b f_-^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente que converge a $\displaystyle\int_a^b f$, y $\displaystyle\left(\int_a^b f_+^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente que converge a $\displaystyle\int_a^b f$.

<u>Indicación:</u> Observe que, si $g, h \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ son funciones escalonadas, entonces $\max\{f,g\}$ y $\min\{f,g\}$ también son funciones escalonadas.

P26. Considere la función $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0,1], \\ 1 & \text{si } x \in (1,2]. \end{cases}$$

Encuentre $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y funciones escalonadas $f^-, f^+\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ asociadas a la partición $P = \left\{\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{n}{n}, 2\right\}$ tales que

$$\int_0^2 (f^+ - f^-) \leq 10^{-3}.$$

P27. Sea $q \in (0,1)$. Considere la sucesión (a_n) definida por $a_n = \displaystyle\int_0^n q^x \,\mathrm{d}x$.

a) Justifique que (a_n) está bien definida, en el sentido de que cada integral existe, y que es estrictamente creciente.

b) Para $n \in \mathbb{N}$ fijo, considere la partición $P_n = \{0, 1, 2, ..., n\}$ del intervalo $[1, n]$. Usando funciones escalonadas apropiadas pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$q \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \leq a_n \leq \frac{1}{1 - q}.$$

c) Concluya que (a_n) converge y que su límite a satisface que

$$\frac{q}{1 - q} \leq a \leq \frac{1}{1 - q}.$$

P28. Sea $f\colon [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ una función creciente.

a) Justifique que f está acotada en el intervalo $[1, n]$, para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

b) Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ fijo. Usando la partición $P_n = \{1, 2, ..., n\}$ del intervalo $[1, n]$ y funciones escalonadas apropiadas asociadas a P_n, pruebe que

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \leq \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{i=2}^{n} f(i).$$

c) Suponga ahora que $f(x) = \ln(x)$. Usando que $\displaystyle\int_1^n \ln(x)\,\mathrm{d}x = n\ln(n) + 1 - n$, demuestre que

$$(n-1)! \leq n^n e^{1-n} \leq n!.$$