

Pauta auxiliar 2: Los grandes teoremas y continuidad

P₁ Demuestre con la caracterización ϵ - δ que:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ es continua en $\bar{x} = 1/2$.

Primero, Caracterización ϵ - δ :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, \underbrace{|x - \bar{x}| \leq \delta}_{\text{Hipotesis}} \Rightarrow \underbrace{|f(x) - f(\bar{x})| \leq \epsilon}_{\text{conclusion}}$$

En este tipo de ejercicios nos piden demostrar $\forall \epsilon > 0$, es decir, un ϵ arbitrario y encontrar un δ que dependa de ϵ tal que me asegure que la Hipotesis $\Rightarrow$ la conclusión para esto,

1) Trabajaremos la expresión $|f(x) - f(\bar{x})|$ hasta llegar a algo del estilo $|x - \bar{x}| g(x)$

2) Luego acotamos $g(x)$ hasta obtener para poder tener $g(x)|x - \bar{x}| \leq c\delta$

3) Vemos que tiene que pasar para que $c|x - \bar{x}| \leq \epsilon$
lo que tiene que pasar es $|x - \bar{x}| \leq \frac{\epsilon}{c}$

4) como $|x - \bar{x}| < \delta$ tomamos $\delta = \epsilon/c$ y con esto concluimos

Ahora en este ejercicio

Nos piden que $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - 1/2| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(1/2)| \leq \epsilon$

Sea $\epsilon > 0$ arbitrario y $x \in \mathbb{R}$ también arbitrario.

Luego aplicamos paso 1)

$$\begin{aligned} |f(x) - f(\bar{x})| &= \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{1/2} \right| = \left| \frac{1}{x} - 2 \right| = \left| \frac{1 - 2x}{x} \right| = \left| \frac{-2x + 1}{x} \right| \\ &= \left| \frac{(-2)(x - 1/2)}{x} \right| \\ &= \left| 2 \left(\frac{x - 1/2}{x} \right) \right| = \left| \frac{2}{x} \cdot (x - 1/2) \right| \end{aligned}$$

$\left(\frac{2}{x} \right) \cdot (x - 1/2)$
 $\leftarrow g(x)$

Ahora como llegamos a algo de la forma $|x - x_0| g(x)$, donde $g(x) = \left| \frac{2}{x} \right|$

Aplicamos paso 2)

Debemos acotar $g(x)$ por alguna constante.

¿cómo hacemos esto?

Nos damos algún δ particular y encontramos alguna cota para $g(x)$

$$|x - 1/2| \leq \delta \Leftrightarrow -\delta \leq x - 1/2 \leq \delta$$

$$-\delta + 1/2 \leq x \leq \delta + 1/2$$

→ Si tomamos $\delta = 1/4$

$$-1/4 + 1/2 \leq x \leq 1/4 + 1/2$$

$$1/4 \leq x \leq 3/4$$

$$4/3 \leq \frac{1}{x} \leq 4 \quad / \cdot 2$$

$$8/3 \leq \frac{2}{x} \leq 8$$

$$-8 \leq \frac{2}{x} \leq 8 \Rightarrow \left| \frac{2}{x} \right| \leq 8$$

OJO: podríamos haber tomado cualquier δ (ie $\delta = 2$, $\delta = 1/5$, etc)

Hemos logrado acotar $g(x) = \left| \frac{2}{x} \right|$ si $|x - 1/2| \leq 1/4$

↳ tener en cuenta!

Ahora como $\left| \frac{2}{x} \right| \leq 8$, Volvemos a nuestro desarrollo anterior:

$$|f(x) - f(\bar{x})| = \left| \frac{2}{x} \cdot (x - 1/2) \right| \leq 8 |x - 1/2|$$

$$|f(x) - f(\bar{x})| \leq 8 |x - 1/2|$$

Ahora es el momento de aplicar paso 3)

OJO! Queremos $|f(x) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon$

Entonces si $|x - 1/2| \leq \varepsilon/8$ para un ε arbitrario, se tiene

$$\Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| \leq 8 |x - 1/2| \leq 8 \cdot \frac{\varepsilon}{8} \leq \varepsilon$$

Luego, utilizamos el paso 4)

Ahora notamos que para llegar a lo que necesitábamos usamos 2 condiciones

1) $|x - 1/2| \leq 1/4$ 2) $|x - 1/2| \leq \varepsilon/8$

y sabemos por hipótesis que $|x - y_2| \leq d$

Ahora, necesitamos $\delta = 1/4$ y $\delta = \epsilon/8$; Para un ϵ arbitrario

¿Qué d satisface ambas condiciones?

Si tomamos $\delta = \min\{1/4, \epsilon/8\}$ se cumple $|f(x) - f(\bar{x})| \leq \epsilon$

Luego, como tomamos un ε arbitrario y encontramos un δ (que depende de ε)

tal que $|x - \frac{1}{2}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\frac{1}{2})| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Se concluye que la función $f(x) = \frac{1}{x}$ es continua en $\bar{x} = 1/2$.

6) $h(x) = \sqrt{3x+6}$ en $[1, \infty)$

Primero, Caracterización ϵ - δ :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, |x - \bar{x}| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon$$

Hypothesis conclusion

En este problema:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall x \in \mathbb{R}, |x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |\sqrt{3x+6} - \sqrt{3\bar{x}+6}| \leq \varepsilon$$

Vamos a demostrar que es continua uniformemente en $[1, \infty)$, Pues sabemos por proposición visto en clases que si es uniformemente continua entonces es continua.

OJO: No confundir con el siguiente teorema: Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con A un cerrado y acotado. Entonces f es uniformemente continua **ssi** es continua en todo punto $x \in A$.
 ↪ esta es la gran

↳ esta es la gran diferencia.

Debemos DEMOSTRAR usando Definición de Continuidad uniforme:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_1, x_2 \in A \subseteq \mathbb{R}, \quad |x_1 - x_2| \leq \delta \Rightarrow |h(x_1) - h(x_2)| \leq \varepsilon$$

En este problema

prda: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_1, x_2 \in [1, \infty), |x_1 - x_2| \leq \delta \Rightarrow \left| \sqrt{3x_1+6} - \sqrt{3x_2+6} \right| \leq \epsilon$

Sea $\epsilon > 0$ arbitrario, y $x_1, x_2 \in [1, \infty)$ también arbitrarios.
 luego, tomamos

$$\begin{aligned}
 &= \left| \sqrt{3x_1+6} - \sqrt{3x_2+6} \right| \cdot \left| \frac{\sqrt{3x_1+6} + \sqrt{3x_2+6}}{\sqrt{3x_1+6} + \sqrt{3x_2+6}} \right| \\
 &= \frac{\left| (\sqrt{3x_1+6})^2 - (\sqrt{3x_2+6})^2 \right|}{\left| \sqrt{3x_1+6} + \sqrt{3x_2+6} \right|} \\
 &= \frac{\left| 3x_1+6 - 3x_2-6 \right|}{\left| \underbrace{\sqrt{3x_1+6}}_{\geq 0} + \underbrace{\sqrt{3x_2+6}}_{\geq 0} \right|} \quad \text{Pues } x_1, x_2 \in [1, \infty) \\
 &= \frac{3|x_1 - x_2|}{\sqrt{3x_1+6} + \sqrt{3x_2+6}}
 \end{aligned}$$

Tenemos que encontrar una cota!

Para ello notamos que

$\frac{1}{\sqrt{3x_1+6} + \sqrt{3x_2+6}}$ es una función decreciente en $[1, \infty)$

Pues $\sqrt{\cdot}$ es creciente en $[1, \infty)$, ya que la $\sqrt{3x+6}$ es creciente, en $[1, \infty)$, y la suma de 2 funciones crecientes da una función creciente

Demostración de si $f(x)$ es creciente $\Rightarrow 1/f(x)$ es decreciente

(Ser creciente : $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow \frac{1}{f(x_1)} \geq \frac{1}{f(x_2)}$
 y como $x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{f(x_1)} \geq \frac{1}{f(x_2)}$, se tiene $\frac{1}{f(x)}$ es decreciente, si $f(x)$ es creciente)

y sabemos que ser decreciente es $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

luego como estamos trabajando en un intervalo de la forma $[1, \infty)$ tenemos que $1 \leq x \quad \forall x \in [1, \infty)$

$\Rightarrow f(1) \geq f(x) \quad \forall x \in [1, \infty)$

luego, si $x_1 = x_2 = 1$, $\frac{3}{\sqrt{3 \cdot 1 + 6} + \sqrt{3 \cdot 1 + 6}} \geq \frac{3}{\sqrt{3x_1+6} + \sqrt{3x_2+6}} \quad \forall x_1, x_2 \in [1, \infty)$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{q} + \sqrt{q}} \geq \frac{3}{\sqrt{3x_1+6} + \sqrt{3x_2+6}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{6} \geq \frac{3}{\sqrt{3x_1+6} + \sqrt{3x_2+6}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{3}{\sqrt{3x_1+6} + \sqrt{3x_2+6}}$$

Ahora volvemos al problema:

$$\left| \sqrt{3x_1+6} - \sqrt{3x_2+6} \right| = \frac{3 |x_1 - x_2|}{\sqrt{3x_1+6} + \sqrt{3x_2+6}} \leq \frac{L}{2} |x_1 - x_2|$$

¡Ojo! Queremos $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon$

Entonces si $|x_1 - x_2| \leq 2\varepsilon$ para un ε arbitrario, se tiene

$$\left| \sqrt{3x_1+6} - \sqrt{3x_2+6} \right| \leq \frac{L}{2} |x_1 - x_2| \leq \frac{1}{2} 2\varepsilon \leq \varepsilon$$

Como nuestra hipótesis es $|x_1 - x_2| \leq d$ si tomamos $d = 2\varepsilon$ tenemos que $\left| \sqrt{3x_1+6} - \sqrt{3x_2+6} \right| \leq \varepsilon$

∴ $\forall \varepsilon > 0$ podemos tomar $d = 2\varepsilon$, $\forall x_1, x_2 \in [1, \infty)$, $|x_1 - x_2| \leq d \Rightarrow \left| \sqrt{3x_1+6} - \sqrt{3x_2+6} \right| \leq \varepsilon$

ie $h(x) = \sqrt{3x+6}$ es continua uniformemente en $[1, \infty)$

$\Rightarrow h(x) = \sqrt{3x+6}$ es continua en $[1, \infty)$.

P2

a) Sean $f, g: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ funciones continuas tales que
 $f(0) = 0$; $g(0) = 1$; $g(1) = 0$
 y sea $\alpha > 0$ fijo.
 Demuestre que existe un $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = g(\alpha c)$

Idea: usar TVI o Bolzano, pues nos piden una existencia

TVI o Bolzano: sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a) f(b) \leq 0$ entonces existe un $\bar{x} \in [a, b]$ tal que $f(\bar{x}) = 0$

Para ello definimos una función Auxiliar
 $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = f(x) - g(\alpha x)$
 por ahora

Veamos que cumple las hipótesis del teorema:

→ Notamos que $h(x)$ es continua por algebra y composición de continuas
 (Resta de f y g donde g es composición de continuas $\leadsto l(x) = \alpha x$, $g(l(x)) = g(\alpha x)$)
 (es continua pues es lineal)

→ Ahora Recordemos que sabemos que $f(0) = 0$; $g(0) = 1$; $g(1) = 0$
 Luego

$$\begin{aligned} h(0) &= f(0) - g(\alpha \cdot 0) = 0 - 1 = -1 < 0 \\ h(1) &= f(1) - g(\alpha) \text{ No nos aporta Información} \\ h(1/\alpha) &= f(1/\alpha) - g(\alpha \cdot 1/\alpha) = f(1/\alpha) - g(1) = f(1/\alpha) \end{aligned}$$

¿Cómo es $f(1/\alpha)$?

$$\begin{aligned} \text{Notamos que } f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] &\Rightarrow f(1/\alpha) \in [0, 1] \\ &\Rightarrow f(1/\alpha) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow h(1/\alpha) = f(1/\alpha) \geq 0$$

Así tenemos que, $h(0) h(1/\alpha) \leq 0$
 ∴ se cumplen todas las hipótesis del teorema en el Intervalo $[0, 1/\alpha]$
 Como $h(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$, En particular es continua en $[0, 1/\alpha]$

Luego, por teorema de Bolzano o TVI, podemos asegurar la existencia de un $c \in [0, \frac{1}{2}]$ tal que $h(c) = 0$

∴ por definición de $h(x)$, $h(c) = f(c) - g(xc) = 0$
 $\Leftrightarrow f(c) = g(xc)$

Hemos demostrado que existe un $c \in [0, \frac{1}{2}]$ tal que $f(c) = g(xc)$ //

b) Demuestre que la ecuación $x^3 = 2^x$ tiene solución

↳ Idea: nuevamente utilizar Bolzano / TVI, pues nos piden una existencia

Definamos una función Auxiliar $M: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $M(x) = x^3 - 2^x$

Comprobemos las hipótesis del teorema:

→ $M(x)$ es continua por algebra de continuas (Resta entre x^3 y 2^x ambas continuas)

→ Notamos que

$$M(0) = (0)^3 - 2^{(0)} = 0 - 1 = -1 < 0$$

$$M(2) = (2)^3 - 2^{(2)} = 8 - 4 = 4 > 0$$

$$\text{Luego, } M(0) \cdot M(2) = (-1) \cdot 4 = -4 \leq 0$$

∴ Como M cumple con las hipótesis del teorema, lo podemos usar para concluir que $\exists c \in [0, 2]$ tal que $M(c) = 0$

$$\Rightarrow M(c) = c^3 - 2^c = 0$$

$$\Rightarrow c^3 = 2^c \quad \text{con } c \in [0, 2]$$

∴ la ecuación $x^3 = 2^x$ tiene solución

Sea g una función continua en $[a, b]$ donde $a < b$, y tal que

$$0 < g(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Demuestre que existe $\kappa > 0$ tal que

$$\kappa < g(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

⚠️ nos piden que exista un $\kappa > 0$ tal que $\kappa < g(x) \quad \forall x \in [a, b]$ NO No tiene por qué pertenecer a $[a, b]$, solo nos piden que sea $\kappa > 0$.

Idea: usar el teorema de Weierstrass, pues nos piden una existencia de un mínimo

teorema de Weierstrass: Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, definida en el cerrado y acotado $[a, b]$. Entonces f es acotada y alcanza su mínimo y su máximo en $[a, b]$

En nuestro problema tenemos una función g definida en un cerrado y acotado $[a, b]$, además g es continua.

luego como se cumplen todas las hipótesis del teorema,
 $\Rightarrow$ por teorema de Weierstrass, g alcanza su mínimo en $[a, b]$ en $[a, b]$.

Es decir $\exists \bar{x} \in [a, b]$ tal que

$$g(\bar{x}) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{definición de} \\ \text{mínimo.} \end{array} \right.$$

⚠️! NO podemos tomar $\kappa = g(\bar{x})$ y concluir pues nos piden $\kappa < g(x) \quad \forall x \in [a, b]$ con $\kappa > 0$,

y con $g(\bar{x}) = \kappa \leq g(x)$ tenemos un $(\leq)$ y no sabemos si $g(\bar{x}) > 0$

Sin embargo, por enunciado tenemos que $0 < g(x) \quad \forall x \in [a, b]$ en particular $g(\bar{x}) > 0$ luego tenemos $0 < g(\bar{x}) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$

(solo nos falta un κ que cumpla con $0 < \kappa < g(x)$ MENOR ESTRICTO)

Si tomamos $\kappa = g(\bar{x})/2$ vemos que se tiene $0 < \frac{g(\bar{x})}{2} < g(\bar{x}) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$

$$\Rightarrow 0 < \frac{g(\bar{x})}{2} < g(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

$\therefore$ hemos demostrado que $\exists \kappa = g(\bar{x})/2$ tal que $0 < \kappa < g(x) \quad \forall x \in [a, b]$,

P4

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función Lipschitz, es decir, $\exists L > 0, \forall x, y \in \text{Dom}(f)$

$$|f(x) - f(y)| \leq L |x - y|. \text{ Pruebe los siguientes enunciados:}$$

a) Sea $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo I , si f es Lipschitz en I , entonces f es uniformemente continua. ¿es f además continua?

Queremos demostrar que:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0: \underbrace{\forall x, y \in I, |x - y| \leq \delta}_{\text{hipotesis}} \Rightarrow \underbrace{|f(x) - f(y)| \leq \epsilon}_{\text{conclusion}}$$

tenemos por enunciado que f es Lipschitz en I , ie sabemos que

$$\exists L > 0: \forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq L |x - y|$$

Ahora sea $\epsilon > 0$ arbitrario y $x, y \in I$ también arbitrarios.

Luego procedemos de forma similar a la pregunta 1), Haciaqueando la conclusión

$$\begin{aligned} \text{tenemos } |f(x) - f(y)| &\leq L |x - y| && \text{pues } f \text{ es Lipschitz} \\ &\leq L \delta && \text{por Hipotesis } |x - y| \leq \delta \end{aligned}$$

Luego como queremos $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$, si tomamos $\delta = \frac{\epsilon}{L}$

$$\text{Entonces tendremos } |f(x) - f(y)| \leq L \frac{\epsilon}{L} = \epsilon$$

Por lo tanto como ϵ es arbitrario, podemos concluir que $\forall \epsilon > 0$ logramos encontrar un $\delta = \delta(\epsilon) = \epsilon/L$, tal que $\forall x, y \in I, |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$

∴ f es uniformemente continua

¿es continua?

Si pues si una función es uniformemente continua entonces es continua.

b) $f(x) = x^2$ es uniformemente continua en $[0, 1]$, Pero No lo es en $\mathbb{R}$

Notamos que tenemos que

$$f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ con } A = [0, 1] \text{ tal que } f(x) = x^2$$

Como $A \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo, entonces por resultado anterior sabemos que si f es Lipschitz en A , entonces f es uniformemente continua.

Por lo tanto debemos demostrar que f es Lipschitz

$$\text{pda: } \exists L > 0: \forall x, y \in A, |f(x) - f(y)| \leq L |x - y|$$

Sean $x, y \in A = [0, 1]$ arbitrarios

luego,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |x^2 - y^2| \\ &= |(x+y)(x-y)| \quad x+y \geq 0 \text{ pues } x, y \in [0,1] \\ &= (x+y) |x-y| \end{aligned}$$

Ahora notamos que como $x, y \in [0,1]$ el máximo valor que pueden tomar x e y es 1
luego,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= (x+y) |x-y| \\ &\leq (1+1) |x-y| \\ &= 2 |x-y| \end{aligned}$$

$\therefore$ Como $|f(x) - f(y)| \leq 2 |x-y|$, hemos demostrado que $\exists L=2 > 0$ para todo $x, y \in [0,1]$

$\Rightarrow f(x)$ es Lipschitz

Luego, usando la parte anterior podemos concluir que f es uniformemente continua en $[0,1]$.

Veamos ahora porque no es uniformemente continua en todo $\mathbb{R}$

para ello vamos a demostrar la negación de ser uniformemente continua.

i.e.:

$$\overline{\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, y \in \mathbb{R}, \underset{\text{hipotesis}}{|x-y| < \delta} \Rightarrow \underset{\text{conclusion}}{|f(x) - f(y)| < \epsilon}}$$

$$\Leftrightarrow \exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, y \in \mathbb{R}, |x-y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| > \epsilon$$

Ahora sea $\epsilon = 1$, $\delta > 0$ arbitrario y escogeremos $y \in \mathbb{R} : y = x + \delta$ con $x \in \mathbb{R}$

luego

$$|x - y| = |x - x - \delta| = |- \delta| = \delta$$

por lo que se tiene $|x - y| < \delta$.

Por el otro lado,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |x^2 - y^2| \\ &= |x^2 - (x+\delta)^2| \\ &= |x^2 - x^2 - 2x\delta - \delta^2| \\ &= |-2x\delta - \delta^2| \\ &= |-\delta| |2x + \delta| = \delta |2x + \delta| \end{aligned}$$

todavía no definido

Ahora $|f(x) - f(y)| = d |2x + d|$

Como $d > 0$, y $2x + d$ es lineal creciente $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} 2x + d = +\infty$

luego $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $2x + d > 1$, tomamos en particular ese x

$\Rightarrow |f(x) - f(y)| = d |2x + d| > 1$ pues elegimos un x tal que esto se cumpla

y como tomamos $\varepsilon = 1$ se tiene

$$|f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

∴ Hemos demostrado

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, y \in \mathbb{R}, |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

Que es la negación de ser uniformemente continua, luego no es uniformemente continua en todo $\mathbb{R}$.



¡ ánimo en el estudio!