MA1002-2 Cálculo Diferencial e Integral
Profesora: Diana Narváez
Auxiliares: Magdalena Bravo, Jesús Sayes

Auxiliar 2: Los grandes teoremas y continuidad

Pregunta 1. *Estudie la continuidad de las siguientes funciones a través de la caracterización $\epsilon - \delta$.*

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$, *en* $\overline{x} = \frac{1}{2}$.

(b) $h(x) = \sqrt{3x+6}$, *en* $[1, \infty]$.

Pregunta 2. *Utilice los grandes teoremas de continuidad vistos en clase.*

(a) *Sean* $f, g \colon \mathbb{R} \to [0,1]$ *funciones continuas tales que:*

$$f(0) = 0;\ g(0) = 1;\ g(1) = 0,$$

y sea un $\alpha > 0$ *fijo. Demuestre que existe un* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(c) = g(\alpha c)$.

(b) *Demuestre que la siguiente ecuación* $x^3 = 2^x$ *tiene solución en los Reales.*

Pregunta 3. *Sea* g *una función continua en* $[a,b]$, *donde* $a < b$ *y tal que:*

$$0 < g(x)\ \forall x \in [a,b].$$

Demuestre que existe $k > 0$ *tal que:*

$$k < g(x)\ \forall x \in [a,b].$$

Pregunta 4. *Sea* $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función Lipschitz, es decir,* $\exists L > 0, \forall x, y \in \mathrm{Dom}(f), |f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$. *Pruebe los siguientes enunciados:*

(a) *Sea* $f \colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función definida en un intervalo* I. *Si* f *es Lipshitz en* I, *entonces* f *es uniformemente continua. ¿Es* f *además continua?*

(b) $f(x) = x^2$ *es uniformemente continua en* $[0,1]$, *pero no lo es en todo* $\mathbb{R}$.

Problemas Propuestos

Pregunta 5. *Estudie la continuidad de las siguientes funciones a través de la caracterización $\epsilon - \delta$.*

(a) $f(x) = 4x^2 + 6x - 4$, *en* $x = 1$.

(b) $g(x) = \frac{2}{3x}$, *en* $x = \frac{1}{3}$.

Pregunta 6. (a) *Sean* $f, g \colon [a,b] \to [c,d]$ *continuas, y tales que* $f(a) = g(b) = c$. *Demuestre que existe* $\bar{x} \in [a,b]$ *que verifica* $f(\bar{x}) = g(\bar{x})$.

(b) *Sean* $f, g \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *continuas, y tales que* $f(x) < g(x)$ *en todo su dominio. Muestre que existe* $\lambda > 0$ *tal que* $f(x) + \lambda \leq g(x)$.

(c) *Demuestre que la función* $f(x) = x^{90} + \dfrac{150}{1 + x^2 + x^4}$ *tiene alguna raíz real.*

Pregunta 7. *Sea* $f: A \to \mathbb{R}$ *una función definida por* $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$*. Estudie la continuidad uniforme de* f *en los siguientes casos:*

(i) *Si* $A = (0, +\infty)$.

(ii) *Si* $A = (a, b)$, *con* $0 < a < b$.

(iii) *Si* $A = [a, +\infty)$, *con* $a > 0$.

Resumen

Teorema 1 (Caracterización $\epsilon - \delta$)**.** *Sean* $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $\bar{x} \in A$*. Diremos que* f *es continua en* $\bar{x}$ *si y sólo si*

$$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \delta > 0)(\forall\ x \in A)(|x - \bar{x}| < \delta \implies |f(x) - f(\bar{x})| < \epsilon).$$

Definición 1 (Función Continua)**.** *Sea* $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*.* f *es una función continua si es continua* $\forall \bar{x} \in A$*.*

Teorema 2 (Bolzano)**.** *Sean* $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continua tal que* $f(a)f(b) \leq 0$*, entonces existe* $x_0 \in [a, b]$ *tal que* $f(x_0) = 0$*.*

Teorema 3 (TVI)**.** *Sea* $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función continua y* c, $d \in f([a, b])$ *con* $c \leq d$*. Entonces para todo* $y_0 \in [c, d]$*, existe* $x_0 \in [a, b]$ *tal que* $f(x_0) = y_0$*.*

Teorema 4 (Weierstrass)**.** *Sea* $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función continua, (donde* $[a, b]$ *es un intervalo cerrado y acotado), Entonces* f *es acotada y alcanza su máximo y su mínimo en* $[a, b]$*.*

Teorema 5 (Continuidad de funciones inversas)**.** *Sea* $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función continua y estrictamente monótona (creciente o decreciente) con* I *un intervalo. Entonces* $J = f(I)$ *es un intervalo y la inversa* $f^{-1}: J \to I$ *es continua.*

Definición 2 (Continuidad Uniforme)**.** *La función* $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *se dice uniformemente continua si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta = \delta(\varepsilon)$ *tal que:*

$$\forall\ x, y \in A, (|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Proposición 1. *Toda función uniformemente continua, es continua.*

Teorema 6. *Sea* $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *con* A *un cerrado y acotado. Entonces* f *es uniformemente continua ssi es continua en todo punto* $x \in A$*.*