El conocimiento es y nos hará libres

Auxiliar Extra pre Examen

Secciones 8 y 9

Introducción al Cálculo

FCFM Universidad de Chile

Sebastián Gangas

Ignacio Díaz

Gisela Abarca Andereya

Ignacio Dagach Abugattas

P1. Para comenzar Ignacio Dagach Abugattas

a) Considere $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x) - 1}{e^{x^2} - 1} & \text{si } x \in A,\ x > 0 \\ \dfrac{x^2 - x}{2x + x^2} & \text{si } x \in A,\ x < 0 \end{cases}$$

- Determine A, ceros y signos de f.
- Determine, de existir, $\lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to -2} f(x)$.
- Determine, de existir, $\lim_{x\to \infty} f(x)$, $\lim_{x\to -\infty} f(x)$.
- Concluya si hay, o no, asíntotas horizontales y verticales e identifíquelas

b) Calcule la asíntota oblícua hacia $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x-2} e^{\frac{1}{x}}$

c) Calcule todas las asíntotas de $f(x) = \dfrac{x^2 + |x| + 1}{x - |x|}$

DOMINIO!

- $\boxed{0 \notin A}$
- $e^{x^2} - 1 = 0$ $(x>0)$

$e^{x^2} = 1$

$x^2 = 0$

$x = 0$

- $2x + x^2 = 0$ $(x<0)$ ✓

$x(2+x) = 0$

$\cancel{x = 0} \vee \boxed{x = -2}$

$\therefore\ A = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}.$

P1. Para comenzar

a) Considere $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x) - 1}{e^{x^2} - 1} & \text{si } x \in A,\ x > 0 \\ \dfrac{x^2 - x}{2x + x^2} & \text{si } x \in A,\ x < 0 \end{cases}$$

- Determine A, ceros y signos de f.
- Determine, de existir, $\lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to -2} f(x)$.
- Determine, de existir, $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to -\infty} f(x)$.
- Concluya si hay, o no, asíntotas horizontales y verticales e identifíquelas

b) Calcule la asíntota oblícua hacia $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x-2} e^{\frac{1}{x}}$

c) Calcule todas las asíntotas de $f(x) = \dfrac{x^2 + |x| + 1}{x - |x|}$

Consideremos la ecuación $\operatorname{sen} x = a$ donde $a \in \mathbb{R}$

a) Si $|a| > 1$, entonces no existe solución.

b) Si $|a| \leq 1$, es fácil encontrar una solución $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$, que corresponde a $\alpha = \arcsin a$.

Sin embargo como la función sen no es epiyectiva, esta solución no es única. La solución general suele escribirse de la siguiente forma:

$$x = k\pi + (-1)^k \alpha$$

donde $k \in \mathbb{Z}$. Así tomamos todos los posibles valores de x dada la periodicidad de sen.

Consideremos la ecuación $\cos x = a$ donde $a \in \mathbb{R}$

a) Si $|a| > 1$, entonces no existe solución.

b) Si $|a| \leq 1$, es fácil encontrar una solución $\alpha \in [0, \pi]$, que corresponde a $\alpha = \arccos a$.

Sin embargo como la función cos no es epiyectiva, esta solución no es única. La solución general suele escribirse de la siguiente forma:

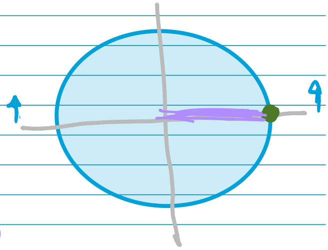
$$x = 2k\pi \pm \alpha$$

donde $k \in \mathbb{Z}$. Así tomamos todos los posibles valores de x dada la periodicidad de cos.

$\cos(x) = a$ con $|a| \leq 1$ ✓

$\iff$

$x = 2k\pi \pm \arccos(a)$



Ceros

$x > 0$

$\cos(x) - 1 = 0$

$\cos(x) = 1$

$x = 2k\pi \pm \arccos(1)$, $k \in \mathbb{Z}$

$x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 0$.

$x < 0$

$x^2 - x = 0$

$x(x-1) = 0$

$\cancel{x = 0} \vee \cancel{x = 1}$

$0 \notin A$ $\quad$ $1 > 0$

"No hay ceros"

a) Considere $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x)-1}{e^{x^2}-1} & \text{si } x \in A,\ x > 0 \\ \dfrac{x^2-x}{2x+x^2} & \text{si } x \in A,\ x < 0 \end{cases}$$

- Determine A, ceros y signos de f.

$\boxed{x>0}$ NOTAR que $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad -1 \leq \cos(x) \leq 1$

$\Rightarrow \quad -2 \leq \cos(x)-1 \leq 1-1=0$

$\Rightarrow \quad \cos(x)-1 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

$e^0 < e^{x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

$e^0-1 < e^{x^2}-1$

$1-1$

$0 < e^{x^2}-1$

IDEA

NOTAR que PARA $x>0$, $e^{\cdot}$ y x^2 son inyectivas y estrictas crecientes

$\Rightarrow e^{x^2}$ es estricta creciente PARA $x>0$

$\Rightarrow \quad e^0 < e^{x^2} \quad$ si $x>0$

$e^0-1 < e^{x^2}-1$

$1-1 < e^{x^2}-1$

$0 < e^{x^2}-1 \quad$ con $x>0$

si $x>0$, $f(x) \leq 0$ por ley de signos

a) Considere $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x) - 1}{e^{x^2} - 1} & \text{si } x \in A,\ x > 0 \\ \dfrac{x^2 - x}{2x + x^2} & \text{si } x \in A,\ x < 0 \end{cases}$$

- Determine A, ceros y signos de f.

$\boxed{\text{si } x<0}$ ✓

PARA signos $f(x) = \dfrac{x^2-x}{2x+x^2} = \dfrac{x(x-1)}{x(2+x)} = \dfrac{(x-1)}{(x+2)}$

los ceros son 1 y -2

$\boxed{-2}$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$
$(x-1)$	$(-)$	$(-)$
$(x+2)$	$(-)$	$(+)$
$f(x)$	$(+)$	$(-)$

$\boxed{\text{Signos}}$

si $x \in (0,+\infty)$, $f(x) \leq 0$

si $x \in (-\infty,-2)$, $f(x) \geq 0$

si $x \in (-2,0)$, $f(x) \leq 0$

P1. Para comenzar

a) Considere $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x) - 1}{e^{x^2} - 1} & \text{si } x \in A,\ x > 0 \\ \dfrac{x^2 - x}{2x + x^2} & \text{si } x \in A,\ x < 0 \end{cases}$$

- Determine A, ceros y signos de f.
- Determine, de existir, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$.
- Determine, de existir, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos(x) - 1}{e^{x^2} - 1}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{\cos(x) - 1}{x^2} \to -\frac{1}{2}}{\dfrac{e^{x^2} - 1}{x^2} \to 1}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{u \to 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1.$$

$\uparrow$ cv

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}$$

Como $\dfrac{\cos(x) - 1}{x^2} \xrightarrow{x \to 0^+} -\dfrac{1}{2}$ y

Como $\dfrac{e^{x^2} - 1}{x^2} \xrightarrow{x \to 0} 1$

Por Álgebra de límites

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos(x) - 1}{e^{x^2} - 1} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x)$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 - x}{2x + x^2}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x(x-1)}{x(2+x)} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x-1}{2+x} = -\frac{1}{2}$$

luego, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{2}$$

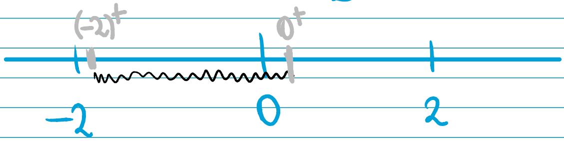
$$\lim_{x \to (-2)^+} f(x) = \lim_{x \to (-2)^+} \frac{x^2 - x}{2x + x^2}$$

$$= \lim_{x \to (-2)^+} \frac{x-1}{2+x}$$

$$(-2)^+ - 1 = (-3)^+$$

$$2 + (-2)^+ = 0^+$$

$$2 +$$



NUM $\rightarrow (-3)^+$ (Negativo)

denom $\rightarrow 0^+$ (positivo)

luego $\lim_{x \to (-2)^+} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \to (-2)^-} f(x)$$

$$= \lim_{x \to (-2)^-} \frac{x-1}{2+x}$$

$$\left.\begin{array}{l} (-2)^- - 1 = (-3)^- \\ 2 + (-2)^- = 0^- \end{array}\right\} \text{igual signo}$$

NUM $\rightarrow (-3)^-$

denom $\rightarrow 0^-$ Ambos negativos

$$\lim_{x \to (-2)^-} f(x) = +\infty$$

luego

$$-\infty = \lim_{x \to (-2)^+} f(x) \neq \lim_{x \to (-2)^-} f(x) = +\infty$$

$\Rightarrow \lim_{x \to -2} f(x)$ no existe

Para comenzar

a) Considere $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x) - 1}{e^{x^2} - 1} & \text{si } x \in A,\ x > 0 \\ \dfrac{x^2 - x}{2x + x^2} & \text{si } x \in A,\ x < 0 \end{cases}$$

- Determine A, ceros y signos de f.
- Determine, de existir, $\lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to -2} f(x)$.
- Determine, de existir, $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to -\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cos(x) - 1}{e^{x^2} - 1}$$

$-2 \leq \cos(x) - 1 \leq 0$

$\Rightarrow$

$\cos(x) - 1$ es ACOTADA

$\dfrac{1}{e^{x^2}-1}$ OJALÁ fuera nula,

lo es!! pues

$e^{x^2} \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty \Rightarrow e^{x^2} - 1 \xrightarrow{x\to\infty} \infty$

$\Rightarrow \dfrac{1}{e^{x^2}-1} \xrightarrow{x\to\infty} 0$ (NULA)

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\cos(x) - 1}{e^{x^2} - 1} = \lim_{x\to\infty} \cos(x) - 1 \cdot \frac{1}{e^{x^2} - 1} = 0$$

por NULA · ACOTADA ☺

Para comenzar

a) Considere $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x) - 1}{e^{x^2} - 1} & \text{si } x \in A,\ x > 0 \\ \dfrac{x^2 - x}{2x + x^2} & \text{si } x \in A,\ x < 0 \end{cases}$$

- Determine A, ceros y signos de f.
- Determine, de existir, $\lim_{x \to 0} f(x)$, $\lim_{x \to -2} f(x)$.
- Determine, de existir, $\lim_{x \to \infty} f(x)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - x}{2x + x^2}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1 \cdot x - 1}{2 + x \cdot 1}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{1}{x}(x-1)}{\frac{1}{x}(2+x)} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{1}^{1} - \cancel{\frac{1}{x}}^{0}}{\cancel{\frac{2}{x}}^{0} + \cancel{1}^{1}} \quad \begin{matrix} \to 1 - 0 = 1 \\ \to 0 + 1 = 1 \end{matrix} \quad \frac{1}{1} = 1$$

Como $-\frac{1}{x}, \frac{2}{x} \to 0$ y $1 \to 1$

Por Álgebra de Límites $1 - \frac{1}{x}, 1 + \frac{2}{x} \to 1.$

luego, por Álg de límites $\dfrac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} \to \dfrac{1}{1} = 1.$

(TODO LO ANTERIOR CUANDO $x \to -\infty$)

ASÍNTOTAS

RESUMEN

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{-1}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to (-2)^+} f(x) = -\infty \\ &\lim_{x \to (-2)^-} f(x) = +\infty \end{aligned}\right\} \quad x = (-2) \text{ AV.}$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \qquad Y = 0 \text{ AH}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1, \qquad Y = 1 \text{ AH}$$

b) Calcule la asíntota oblícua hacia $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x-2} e^{\frac{1}{x}}$

$\hookrightarrow y = mx + n$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{(x-1)^2}{x(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\left[\frac{1\cdot x^2 - 2x + 1}{1\cdot x^2 - 2x}\right]}_{\to 1} = 1 \cdot 1 = 1.$$

$$n = \text{"}\lim_{x\to\infty}\text{"} \left[f(x) - mx \right]$$

$$\text{"} \quad \text{"}\left[e^{\frac{1}{x}} \frac{(x-1)^2}{(x-2)} - x \right]$$

$$\text{"} \quad \text{"}\left[\frac{e^{\frac{1}{x}} (x-1)^2 - x(x-2)}{(x-2)} \right]$$

$$\text{"} \quad \text{"}\left[\frac{e^{1/x}(x^2 - 2x + 1) - (x^2 - 2x)}{x-2} \right]$$

$$\text{"} \quad \text{"}\left[\frac{e^{1/x} x^2 - e^{1/x} 2x + e^{1/x} - x^2 + 2x}{x-2} \right]$$

$$\text{"} \quad \text{"}\left[\frac{x^2(e^{1/x} - 1) - 2x(-1 + e^{1/x}) + e^{1/x}}{x-2} \right]$$

$$\text{"} \quad \text{"}\left[\frac{(e^{1/x} - 1)(x^2 - 2x) + e^{1/x}}{x-2} \right]$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(e^{1/x}-1)(x^2-2x)+e^{1/x}}{x-2}\right]$$

$$" \lim " \left[\frac{(e^{1/x}-1)(x-2)x+e^{1/x}}{(x-2)}\right]$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[(e^{1/x}-1)x+\frac{e^{1/x}}{(x-2)}\right] \quad \frac{e^{1/x}}{(x-2)} \to 0$$

$$\boxed{\lim_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}=1}$$

estudiemos

$$\lim_{x\to\infty}(e^{1/x}-1)x$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{1/x}-1}{1/x}$$

si $1/x=u$ y $x\to\infty$

$\Rightarrow u\to 0$

$$\lim_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}=1$$

luego, $\lim_{x\to\infty}(e^{1/x}-1)x=1$.

además, $\lim_{x\to\infty}\frac{e^{1/x}}{x-2}=0$.

$\Rightarrow$ por álgebra de límites

$$n=" \lim_{x\to\infty} "[f(x)-mx]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[(e^{1/x}-1)x+\frac{e^{1/x}}{(x-2)}\right]=1+0=1.$$

luego, la asíntota oblicua es $y=mx+n$ con $m=n=1$

c) Calcule todas las asíntotas de $f(x) = \dfrac{x^2 + |x| + 1}{x - |x|}$

en 0 NO está definida.

veamos en $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ $\qquad x \in \mathbb{R}^+ \iff |x| = x$

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - x} = \frac{x^2 + x + 1}{0}$$

ups!

$\Rightarrow$

en $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ NO está definida

¿y en $\mathbb{R}_- \setminus \{0\}$??

Sea $x \in \mathbb{R}_- \setminus \{0\}$, $\quad x \in \mathbb{R}_- \setminus \{0\} \iff |x| = -x$

$\Rightarrow$

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{2x}$$

$\Rightarrow \mathrm{DOM}(f) = \mathbb{R}_- \setminus \{0\}$.

el 0 es candidato a AV.

$$\lim_{x \to 0^-} \left[\frac{x^2 - x + 1}{2x} \right]$$

$$\lim_{x \to 0^-} \left[\overset{\to 0}{\frac{x}{2}} - \overset{\to -\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + \overset{\to -\infty}{\frac{1}{2x}} \right] = -\infty.$$

luego $x = 0$ es AV.

AH?

VEAMOS

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+1}{2x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x}\right] = \infty$$ NO podemos concluir NADA

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x+1}{2x} = -\infty$$ NO podemos concluir NADA

AO

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+1}{2x^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+1}{2x} - \frac{x\cancel{x}}{2\cancel{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2-x+1-x^2}{2x}\right]$$

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{-x+1}{2x}\right] = \lim_{x\to\infty} \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2x}\right] = \frac{-1}{2}$$

la AO es $y = mx + n$

con $m = \frac{1}{2}$ y $n = -\frac{1}{2}$

Consideremos la sucesión $(s_n)_n$ definida recursivamente:

$$s_0 = e \qquad s_{n+1} = \ln(s_n) + 1$$

Muestre que:

(i) $(s_n)_n$ es decreciente.
(ii) $(s_n)_n$ está acotada por 1.
(iii) $(s_n)_n$ converge, y su límite L cumple que $e^{L-1} = L$.

$\boxed{s_0 = e}$, $s_1 = \ln(s_0) + 1 = \ln(e) + 1 = \ln(e^1) + 1 = 1 + 1 = 2$

$s_2 = \ln(s_1) + 1 = \ln(2) + 1 \quad \ldots$

$s_n = \ln(s_{n-1}) + 1 = \ln(\ln(s_{n-2}) + 1) + 1$

$= \ln(\ln(\ln(s_{n-3}) + 1) + 1) + 1$

(i) $\boxed{s_n \geq s_{n+1}}$ $\left\{ \begin{array}{l} s_n - s_{n+1} \geq 0 \\ \dfrac{s_n}{s_{n+1}} \geq 1 \end{array} \right.$ $\leftarrow$ * $s_0 = a$, $s_{n+1} = q \cdot s_n$, $\dfrac{\cancel{q^n} \cdot a}{\cancel{q^{n+1}} \cdot a} = \dfrac{1}{q}$

pdq. $s_n - s_{n+1} \geq 0$

$s_n - (\ln(s_n) + 1) \geq 0$

$s_n - \ln(s_n) \geq 1$

Por inducción

* $p(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- CB $p(0)$
- $p(n) \Rightarrow p(n+1)$

$p(n)$ $p(n+1)$

- $s_n \geq s_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- caso base: $s_0 \geq s_1 \qquad e \geq 2$

- Hipótesis inductiva:

Supongamos se cumple

$s_n \geq s_{n+1}$, para algún n.

pdq. $s_{n+1} \geq s_{n+2}$

$\Leftrightarrow s_{n+1} \geq \ln(s_{n+1}) + 1$

$\Leftrightarrow \ln(s_n) \cancel{+1} \geq \ln(\ln(s_n) + 1) \cancel{+1}$

$\Leftrightarrow \ln(s_n) \geq \ln(\ln(s_n) + 1) \quad / \exp(\ )$

$\Leftrightarrow s_n \geq \ln(s_n) + 1$

$\Leftrightarrow s_n \geq s_{n+1}$

(ii) $(S_n)_n$ está acotada por 1 $\qquad S_0 = e$

pdq. $\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n \geq 1$

Por inducción

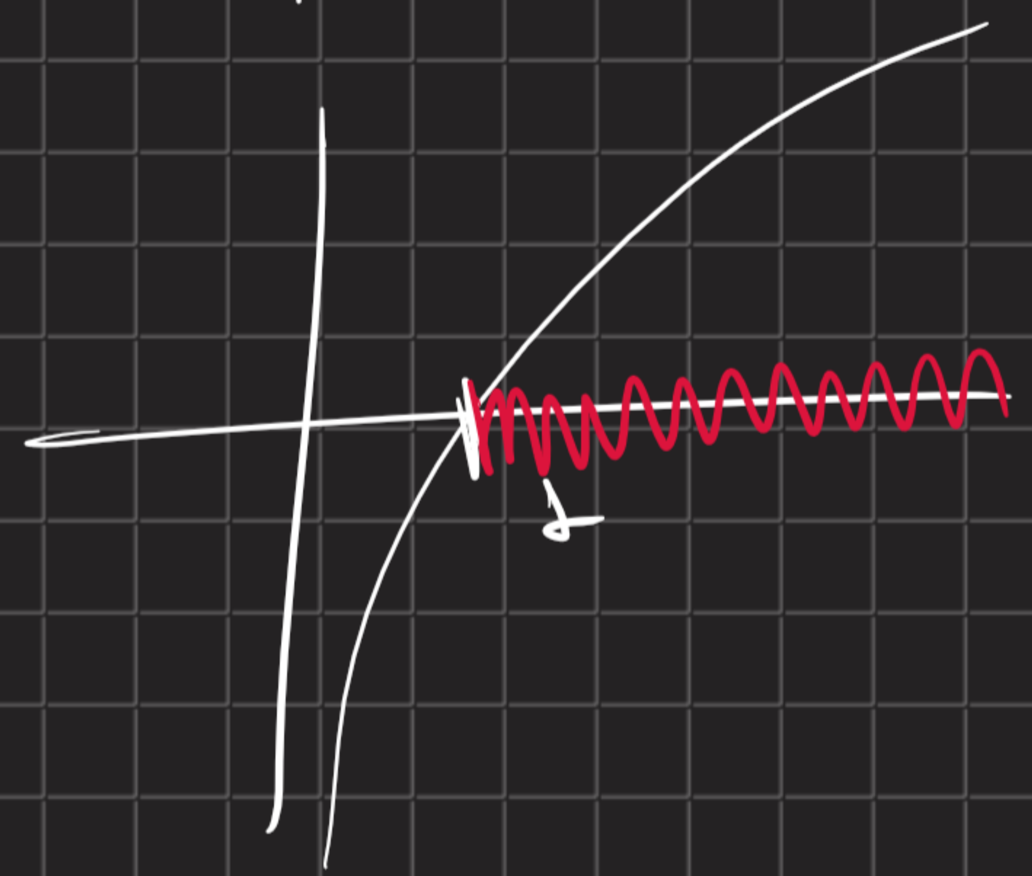
- Caso base $\quad S_0 = e \geq 1$ ✓
- Hipótesis inductiva $\quad S_n \geq 1$, para $n \in \mathbb{N}$

pdq. $\quad S_{n+1} \geq 1$

$$\ln(S_n) + 1 \geq 1$$

$$\ln(S_n) \geq 0 \quad /\exp(\ )$$

$$S_n \geq 1$$



(iii) Como $(S_n)_n$ es monótona y acotada en la dirección de su crecimiento, converge, digamos que a L (ie. $\lim_{n\to\infty} S_n = L$).

pdq. $\quad e^{L-1} = L$

$$S_n \to L$$

$$S_n = \ln(S_{n-1}) + 1$$

$$\underset{\text{"}S_{n-1}\text{"}}{L} \to \underset{\text{"}S_n\text{"}}{L}$$

$$L = \ln(L) + 1$$

$$L - 1 = \ln(L) \quad /\exp(\ )$$

$$e^{L-1} = L$$

$$S_{n+1} = \ln(S_n) + 1 \quad /\lim(\ \ )$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\Big(\underbrace{\ln(S_n)}_{a_n} + \underbrace{1}_{b_n}\Big)$$

$* \lim S_n = L$

$$L = \lim_{n\to\infty}\big(\ln(S_n)\big) + 1$$

$$L = \ln\Big(\underbrace{\lim_{n\to\infty} S_n}\Big) + 1$$

$$L = \ln(L) + 1 \quad /\exp(\ ) \longrightarrow e^{L-1} = L$$

■

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\underbrace{\left(\frac{2}{n}\right)^{3/n}}_{(i)} + \underbrace{\left(\frac{2}{n}\right)^{n}}_{(ii)} \right)$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^{3/n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{\frac{2}{n}}\right)^{3}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{n}}\right)^{3} = \left(\frac{1}{1}\right)^{3} = 1$

Recuerdo: $\sqrt[n]{n} \to 1$

$\sqrt[n]{a} \to 1 \quad \forall a \in \mathbb{R}_+$

como $2 \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt[n]{2} \to 1$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^{n}$

$0 \leq \left(\frac{2}{n}\right)^{n} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n} \quad \forall\, n \geq 3$

$n \to \infty$: $0 \downarrow 0$, $\quad \left(\frac{2}{3}\right)^{n} \downarrow\ ? = 0$

Recuerdo: $q^{n} \to 0$ si $|q| < 1$

$\left|\frac{2}{3}\right| < 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{n} \to 0$

Por Teo. del Sándwich, $\left(\frac{2}{n}\right)^{n} \to 0$

Por lo tanto, (por Álg. de límites)

$\lim \left(\frac{2}{n}\right)^{3/n} + \left(\frac{2}{n}\right)^{n} = 1 + 0 = 1$ //

2. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n+4}$

$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3-1}{n+3}\right)^{n+3+1}$

$= \lim_{n\to\infty} \underline{\left(1 - \frac{1}{n+3}\right)^{n+3}} \cdot \underline{\left(1 - \frac{1}{n+3}\right)}$

$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+3}\right) = 1 - 0 = 1$ //.

c.v: $m = n+3$ $\quad n\to\infty$, $m\to\infty$

$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+3}\right)^{n+3} = \lim_{m\to\infty} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{m} = \frac{1}{e}$

Recuerdo:
$\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{e}$

Por álg. de límites
$\lim \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n+4} = \frac{1}{e} \cdot 1 = \frac{1}{e}$ //.

3. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2+\cos(n!)}\right)^{n}$

$-1 \leq \cos(x) \leq 1$

$n! \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow$

$-1 \leq \cos(n!) \leq 1 \quad) + n^2$

$n^2 - 1 \leq n^2 + \cos(n!) \leq n^2 + 1$

$$\frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+\cos(n!)} \leq \frac{1}{n^2-1}$$

$$\underbrace{\left(\frac{n^2+1}{n^2+1}\right)^n} \leq \underline{\left(\frac{n^2+1}{n^2+\cos(n!)}\right)^n} \leq \left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^n$$

$$1 = 1^n \leq \left(\frac{n^2+1}{n^2+\cos(n!)}\right)^n \leq \left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^n$$

$$\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^n = \left(\frac{n^2+1-2+2}{n^2-1}\right)^n$$

$$= \left(\frac{n^2-1+2}{n^2-1}\right)^n$$

$$= \left(\frac{n^2-1}{n^2-1} + \frac{2}{n^2-1}\right)^n$$

$$= \left(1 + \frac{2}{n^2-1}\right)^n$$

Recuerdo: $\underline{(1+h_n)^n} \to 1$

si $h_n \to 0$ $\quad nh_n \to 0$

- $\frac{2}{n^2-1} \to 0$ ok ✓

$\frac{2n}{n^2-1}$ $\begin{matrix} \leftarrow \text{grado } 1 \\ \leftarrow \text{grado } 2 \end{matrix}$ $\to 0$

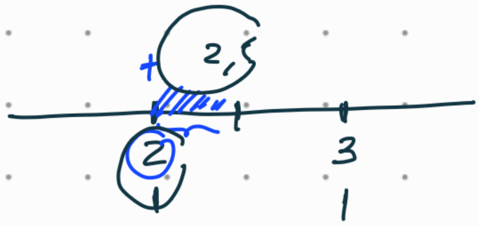
Como vimos que ambas sucesiones tienden a 0 podemos concluir que

$$\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^n \to 1$$

Por Teo. del Sándwich podemos concluir que

$$\lim \left(\frac{n^2 + 1}{n^2 + \cos(n!)} \right)^n = 1 //.$$

4. $\lim\limits_{x \to 1} \left[\frac{2}{1+x^2} \right]$ $\qquad [u]$



$[1,5] = 1 \qquad [2,99] = 2$

$[1,1] = 1 \qquad [0,95] = 0$

$[2,5] = 2.$

$$\lim_{x \to 1} \left[\frac{2}{1+x^2} \right]$$

C.V: $u = \dfrac{2}{1+x^2}$

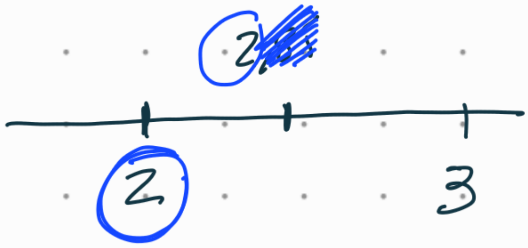
$x \to 1^-$

4. $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{2}{1+x^2} \right]$

$[1{,}5] = 1$

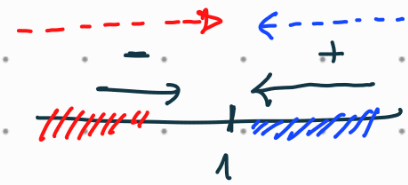
$[1{,}9] = 1$

$[0{,}99] = 0$



$u = \dfrac{2}{1+x^2}$ $\quad u \to \, ?$

$\quad x \to 1$



$\bullet \begin{cases} x \to 1^- \,, & u \to 1^+ \\ x \to 1^+ \,, & u \to 1^- \end{cases}$

$x \to 1^- \Rightarrow x^2 < 1 \quad / +1$

$\Rightarrow 1 + x^2 < 2$

$\Rightarrow 1 < \dfrac{2}{1+x^2} \Rightarrow [u] > 1$

$x \to 1^+ \Rightarrow x^2 > 1$

$\Rightarrow 1 + x^2 > 2 \Rightarrow [u] < 1$

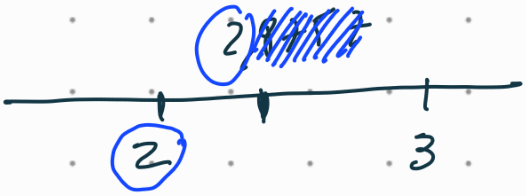
$\Rightarrow 1 > \dfrac{2}{1+x^2}$

$\lim \begin{cases} x \to 1^- \,, & u \to 1^+ \,, & 1 \\ x \to 1^+ \,, & u \to 1^- \,, & 0 \end{cases}$

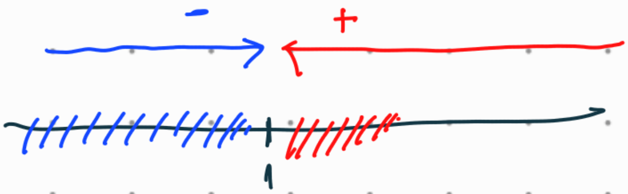
4. $\lim_{x \to 1} \left[\frac{2}{1+x^2} \right]$

Recuerdo:

$[1,5] = 1$
$[1,99] = 1$
$[2,01] = 2$



$u = \dfrac{2}{1+x^2}$



$u \to ?$
$x \to 1$

$[u]$

$$\begin{cases} x \to 1^-, & u \to 1^+, & 1 \\ x \to 1^+, & u \to 1^-, & 0 \end{cases}$$

- $x^2 < 1 \Rightarrow 1 + x^2 < 2$
  $\Rightarrow 1 < \dfrac{2}{x^2+1}$

- $x^2 > 1 \Rightarrow 1 + x^2 > 2$
  $\Rightarrow 1 > \dfrac{2}{x^2+1}$

Los límites laterales son distintos $\Rightarrow$ el límite no existe.

5. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada

$$v_n = \frac{u_1 + 2u_2 + \cdots + n.u_n}{1+2+\cdots+n}$$

pdq: $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada

den:

$$v_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} k\cdot u_k}{\sum_{k=1}^{n} k}$$

Como nos dicen que la suc. u_n esta acotado,
$\forall n\in\mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$, $M>0$.

Queremos demostrar que $\forall n\in\mathbb{N}$, $|v_n| \leq C$

$$|v_n| = \left| \frac{\sum_{k=1}^{n} k u_k}{\sum_{k=1}^{n} k} \right| = \frac{\left|\sum_{k=1}^{n} k u_k\right|}{\left|\sum_{k=1}^{n} k\right|}$$

$$\leq \frac{\sum_{k=1}^{n} |k u_k|}{\sum_{k=1}^{n} k}$$

$$\leq \frac{\sum_{k=1}^{n} k\,|u_k|}{\sum_{k=1}^{n} k}$$

$$\leq \frac{\sum_{k=1}^{n} k \cdot M}{\sum_{k=1}^{n} k}$$

$$= \frac{M \cancel{\sum_{k=1}^{n} k}}{\cancel{\sum_{k=1}^{n} k}}$$

$$= M$$

$$|v_n| \leq M$$

$\therefore$ La sucesión v_n está acotada.

6. $$\lim_{x \to +\infty} x\left(1 - e^{-1/x^2}\right.$$

6. $$\lim_{x \to +\infty} x\left(1 - e^{-1/x^2}\right) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} x\left(1 - e^{-1/x^2}\right)$$

C.V: $u = -\frac{1}{x^2}$ $\quad u \to 0^-$

$x \to +\infty$

$$= \lim_{u \to 0^-}$$

6. $\lim_{x \to +\infty} x\left(1 - e^{-\frac{1}{x^2}}\right) = 0$

6. $\lim_{x \to +\infty} x\left(1 - e^{-1/x^2}\right) = 0$

Calculemos el límite:

C.V: $u = -\dfrac{1}{x^2}$ $\qquad x \to +\infty$

$\qquad u \to 0^-$

$$\lim_{u \to 0^-} \frac{1}{\sqrt{-u}}\left(1 - e^{u}\right) \Big/ \cdot \frac{\sqrt{-u}}{\sqrt{-u}}$$

$u = -\dfrac{1}{x^2}$

$\Rightarrow x^2 = -\dfrac{1}{u} \Big/ \sqrt{\ }$

$\Rightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{-u}}$

$$\lim_{u \to 0^-} \frac{(1-e^{u})}{-u} \cdot \sqrt{-u}$$

$$\lim_{u \to 0^-} \underbrace{\left(\frac{e^{u}-1}{u}\right)}_{=1} \cdot \underbrace{\sqrt{-u}}_{=0}$$

$= 1 \cdot 0$

$= 0$ //.

Determinar asíntota oblicua hacia $+\infty$ de

$$f(x) = \frac{x}{1+e^{-1/x^2}}$$

Pendiente:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}}{1+e^{-1/x^2}} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1+e^{-1/x^2}}$$

$$= \lim_{u \to 0^-} \frac{1}{1+e^{u}}$$

$$= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Constante:

$$n = \lim_{x \to +\infty} f(x) - \underbrace{m}_{1/2} x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{1+e^{-1/x^2}} \right) - \frac{1}{2} x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x - x\left(1 + e^{-1/x^2}\right)}{2\left(1 + e^{-1/x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\overset{x}{2x - x} - x \cdot e^{-1/x^2}}{2\left(1 + e^{-1/x^2}\right)}$$

$$(*) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(1 - e^{-1/x^2}\right)}{2\left(1 + e^{-1/x^2}\right)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} x\left(1 - e^{-1/x^2}\right) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} 2\left(1 + e^{-1/x^2}\right) = 2 \cdot 2 = 4$$

$$(*) = \frac{0}{4} = 0$$

a) Sean $a, b > 0$, demuestre que $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{a}\left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor = \frac{b}{a}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor \frac{b}{x} = 0$.

•) analicemos $\frac{x}{a}\left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor$

Notar que por propiedad arquimediana, si tomamos cualquier $X_n \to 0^+$, para $M \in \mathbb{N}$ existe n_0 a partir del cual $\frac{1}{X_n} > M$, por lo que la función $\left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor$ es no acotada cuando $x \to 0^+$. Por lo que debemos usar sandwich.

Por como se define la función piso (o parte entera), $\lfloor x \rfloor$ es el mayor entero tq $\lfloor x \rfloor \leq x$. Con ello, la siguiente cota es válida

$$\frac{x}{a}\left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor \leq \frac{x}{a} \cdot \frac{b}{x} = \frac{b}{a}$$

Tambien, como $\left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq \frac{b}{x}\}$, tenemos que $\left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor > \frac{b}{x} - 1$ luego,

$$\frac{x}{a}\left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor \geq \left(\frac{b}{x} - 1\right)\frac{x}{a} = \frac{b}{a} - x$$

Planteamos sandwich con estas cotas

$$\frac{b}{a} - x \leq \frac{x}{a}\left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor \leq \frac{b}{a} \qquad / \cdot \lim_{x\to 0^+}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\frac{b}{a} \leq \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{a}\left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor \leq \frac{b}{a} \qquad \therefore \text{ El limite es } \frac{b}{a}$$

Vecindad cerrada de $0/\{0\}$

•) $\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor \frac{b}{x}$. Notar que $\lim\limits_{x\to 0^+} \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor \frac{b}{x} = 0$ ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq $\forall x \in (0, \delta]$, $\left|\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor \cdot \frac{b}{x} - 0\right| < \varepsilon$

Pero si consideramos $\delta = \frac{a}{2}$, tenemos $0 \leq x \leq \frac{a}{2} \iff 0 \leq \frac{x}{a} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor = 0}$

luego, sin importar nuestra elección de ε, $x \in [0, \delta] \Rightarrow \left|\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor \cdot \frac{b}{x}\right| = 0 < \varepsilon$

Por lo que con la caracterización $\varepsilon - \delta$ del límite lateral de funciones, concluimos que $\lim\limits_{x\to 0^+} \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor \frac{b}{x} = 0$.

Notar que en el caso del limite por la izquierda, con $\delta = \frac{a}{2} \Rightarrow x \in [-\frac{a}{2}, 0)$ $\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor = -1$. En vista de que $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{b}{x} = -\infty$, demostremos que $\lim\limits_{x\to 0^-} \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor \frac{b}{x} = +\infty$. PDQ $\forall M > 0, \exists \delta > 0$ tq $\forall x \in [-\delta, 0)$, $\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor \frac{b}{x} \geq M$

Sea $M > 0$, usando $\frac{b}{x} \xrightarrow{x \to 0^-} -\infty$; tenemos la existencia de δ' tq $\forall x \in [-\delta', 0)$, $\frac{b}{x} < -M$ $\iff \frac{-b}{x} > M$. Luego, tomamos $\delta := \min\{\frac{a}{2}, \delta'\}$. de forma tal que

$\forall x \in [-\delta, 0)$: tenemos $\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor \frac{b}{x} = -1 \cdot \frac{b}{x} = \frac{-b}{x} > M$ ...

<=> $-\frac{b}{x} > M$. Luego, tomamos $\delta := \min\{\frac{a}{2}, \delta'\}$. de forma tal que

$\forall x \in [-\delta, 0)$; tenemos $\left\lfloor\frac{x}{a}\right\rfloor \frac{b}{x} = -1 \cdot \frac{b}{x} = -\frac{b}{x} > M$. Que es lo que buscabamos.

Es decir, $\lim_{x \to 0^-} \left\lfloor\frac{x}{a}\right\rfloor \frac{b}{x} = +\infty$

b) Evalúe $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-\sqrt{x}}-\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)$ (notar que trabajamos en $[1, +\infty)$)

$$\left(\sqrt{x-\sqrt{x}} - \sqrt{x+\sqrt{x}}\right) \cdot \frac{\left(\sqrt{x-\sqrt{x}} - \sqrt{x+\sqrt{x}}\right)}{\left(\sqrt{x-\sqrt{x}} - \sqrt{x+\sqrt{x}}\right)} = \frac{x - \sqrt{x} - x - \sqrt{x}}{\sqrt{x-\sqrt{x}} + \sqrt{x+\sqrt{x}}} = \frac{-2\sqrt{x}}{\sqrt{x-\sqrt{x}} + \sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

Pero $\sqrt{x-\sqrt{x}} \leq \sqrt{x+\sqrt{x}}$, por lo que

$$\sqrt{x-\sqrt{x}} + \sqrt{x+\sqrt{x}} \leq 2\sqrt{x+\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x-\sqrt{x}} + \sqrt{x+\sqrt{x}}} \geq \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

$$\therefore \frac{-2\sqrt{x}}{\sqrt{x-\sqrt{x}} + \sqrt{x+\sqrt{x}}} \underset{*(-1)}{\leq} \frac{-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} = -\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$$

De manera análoga $2\sqrt{x-\sqrt{x}} \leq \sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x-\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x-\sqrt{x}}} \geq \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x-\sqrt{x}}}$

$$\therefore \frac{-2\sqrt{x}}{\sqrt{x-\sqrt{x}} + \sqrt{x+\sqrt{x}}} \geq \frac{-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x-\sqrt{x}}} = -\sqrt{\frac{x}{x-\sqrt{x}}}$$

con lo que

$$-\sqrt{\frac{x}{x-\sqrt{x}}} \leq \sqrt{x-\sqrt{x}} - \sqrt{x+\sqrt{x}} \leq -\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$$

Tomando $\lim_{n\to+\infty}$

$$-1 \leq \lim_{n\to+\infty} \sqrt{x-\sqrt{x}} - \sqrt{x+\sqrt{x}} \leq -1$$

$\therefore$ el límite es -1

c) Sean $0 < x_1 < y_1$. Para $n \geq 1$, definimos $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$, $y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n)$. Demuestre que $\lim x_n = \lim y_n$

$$S_n := \frac{y_n}{x_n} : \quad S_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2\sqrt{x_n y_n}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{x_n}{y_n}} + \sqrt{\frac{y_n}{x_n}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}} + \sqrt{S_n}\right)$$

PDQ | $S_n \geq 1$

Caso base $(n=1)$: $S_1 = \frac{y_1}{x_1} > 1$ por $y_1 > x_1$

Hipotesis: $S_n \geq 1$

Paso Inductivo

$$S_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}} + \sqrt{S_n}\right)$$

aquí podemos usar que $\sqrt{S_n} > 0$ para usar la desigualdad $\left(\frac{1}{x} + x \geq 2\right)$

(Se resuelve asumiendo $x>0$, multiplicando por x y resolviendo discriminante)

$\Rightarrow S_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}} + \sqrt{S_n}\right) \geq \frac{1}{2}(2) = 1$ //

PDQ) S_n es decreciente. Sea $n \geq 2$

$S_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}} + \sqrt{S_n}\right)$ Ya que $S_n \geq 1$, $\sqrt{S_n} \leq S_n$

$\therefore S_{n+1} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}} + S_n\right)$ También porque $S_n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{S_n} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{S_n}} \leq 1 \leq S_n$

$\therefore S_{n+1} \leq \frac{1}{2}(S_n + S_n) = S_n$

Con lo que $S_{n+1} \leq S_n$ para $n \geq 2$, por lo que es decreciente.

Ya que S_n es decreciente e inf% acotada, por el teorema de las suc. monótonas $S_n \to l$ para algún l.

Evaluemos el límite en la ecuación de recurrencia $\left(\begin{array}{l} S_n \to l \\ S_{n+1} \to l \end{array}\right)$

$\lim S_{n+1} \text{"="} \lim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}} + \sqrt{S_n}\right)$

Esas comillas son porque a priori no sabemos si el lim de la derecha converge. pero como S_n converge y $\sqrt{\cdot}$ conserva límites (de cosas no negativas), procedemos

$$\lim S_{n+1} = \lim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}} + \sqrt{S_n}\right)$$

$$\Leftrightarrow l = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{l}} + \sqrt{l}\right) \Leftrightarrow l = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{l}}{l} + \sqrt{l}\right) = \frac{\sqrt{l}}{2}\left(\frac{1}{l} + 1\right)$$

Notemos que $l=1$ es la única sol real a la ecuación y cumple con la condición $l \geq 1$.

Por lo que $S_n \to 1$

luego, $S_n = \frac{Y_n}{X_n} \to 1$. Con lo que Y_n, X_n tienden al mismo límite