Auxiliar 13: Límite de Funciones

Profesor: Matias Pavez Signe
Auxiliares: Gisela Abarca Andereya,
Ignacio Dagach Abugattas

P1. Para comenzar

a) Determine $\lim_{x\to 4}\sqrt{2x+1}$ usando la caracterización $\varepsilon-\delta$.

b) Sea A un subconjunto denso numerable de $\mathbb{R}$ y $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua que cumple que $f(a)=0\ \forall a\in A$. Demuestre que $f\equiv 0$.

c) Sea $C=(-\infty,0)\cup\{32\}$. Demuestre que $0\in C'$, pero que $32\notin C'$.

P2. Matraca

Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{\frac{x}{2}}$

b) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}$

c) $\lim_{x\to 0} x\text{sen}\frac{1}{x}$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(x))}{x^2}$

e) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{x^2}}{}$

f) $\lim_{x\to 0}\cos(x)^{-\frac{1}{x^2}}$

g) $\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}$

h) $\lim_{x\to 0}\frac{(\cos(x)-1)^3\cot^4\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan^2(x)}$

P3. De controles

a) Determine, de existir, el siguiente límite. Si no existe debe demostralo también.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(|\alpha x|)-|\beta x|}{x},\quad \text{Donde } \alpha>\beta>0$$

b) Sean $a,b\in\mathbb{R}_+\setminus\{0\}$ y $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida parcialmente según:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin(ax)}{bx} & \text{si } x<0\\ \frac{e^{bx}-1}{x} & \text{si } x>0\end{cases}$$

Encuentre una relación entre a y b para que $\lim_{x\to 0}f(x)$ exista.

Resumen Auxiliar 13
Introducción al Cálculo - MA1001-9 - Otoño 2024
Gisela Abarca Andereya & Ignacio Dagach Abugattas ♡

DEFINICIÓN (PUNTO DE ACUMULACIÓN) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto cualquiera de $\mathbb{R}$. El real $\overline{x} \in \mathbb{R}$ se llama punto de acumulación de A si existe alguna sucesión $(x_n) \subseteq A$ (con valores en A) tal que $x_n \neq \overline{x}$, $\forall n \geq n_0$ algún $n_0 \in \mathbb{N}$ y $x_n \to \overline{x}$.

El conjunto de los puntos de acumulación de $A \subseteq \mathbb{R}$ se denota A'.

DEFINICIÓN Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea $\overline{x} \in A'$, es decir $\overline{x}$ es un punto de acumulación de A. Diremos que f tiende a $\ell \in \mathbb{R}$ cuando x tiende a $\overline{x}$ (lo cual se denotará $f(x) \to \ell$ cuando $x \to \overline{x}$), o bien que ℓ es el límite de $f(x)$ cuando $x \to \overline{x}$ (lo que se anota $\ell = \lim_{x \to \overline{x}} f(x)$) si para toda sucesión (x_n) con valores en A, convergente a $\overline{x}$ y tal que $x_n \neq \overline{x}$, se cumple que la sucesión de las imágenes $(f(x_n))$ es convergente a ℓ.

Teorema 12.1. *Si una función f tiene límite cuando $x \to \overline{x}$ entonces dicho límite es único.*

DEFINICIÓN Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\overline{x} \in \mathbb{R}$. Si denotamos por $A^+ = A \cap (\overline{x}, +\infty)$ y $A^- = A \cap (-\infty, \overline{x})$, entonces

i) Se llama límite lateral por la derecha de la función f en $\overline{x}$ a $\lim_{\substack{x \to \overline{x} \\ x \in A^+}} f(x)$.

ii) Análogamente, a $\lim_{\substack{x \to \overline{x} \\ x \in A^-}} f(x)$ se le llama límite lateral por la izquierda de la función f en $\overline{x}$.

El límite lateral por la derecha se denota por $\lim_{\substack{x \to \overline{x} \\ x > \overline{x}}} f(x)$ o $\lim_{x \to \overline{x}^+} f(x)$ y el limite lateral por la izquierda se denota por $\lim_{\substack{x \to \overline{x} \\ x < \overline{x}}} f(x)$ o bien por $\lim_{x \to \overline{x}^-} f(x)$.

Teorema 12.6 (Caracterización ε-δ de límite). *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\overline{x}$ punto de acumulación de A entonces*

$$\lim_{x \to \overline{x}} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A \cap ([\overline{x} - \delta, \overline{x} + \delta] \setminus \{\overline{x}\}), \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

---

1. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$
2. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$
3. $\lim_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1} = 1$
4. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$