Auxiliar 13: Límite de Funciones

Profesor: Matias Pavez Signe
Auxiliares: Gisela Abarca Andereya,
Ignacio Dagach Abugattas

P1. Para comenzar

a) Determine $\lim_{x\to 4}\sqrt{2x+1}$ usando la caracterización $\varepsilon-\delta$.

b) Sea A un subconjunto denso numerable de $\mathbb{R}$ y $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua que cumple que $f(a)=0\ \forall a\in A$. Demuestre que $f\equiv 0$.

c) Sea $C=(-\infty,0)\cup\{32\}$. Demuestre que $0\in C'$, pero que $32\notin C'$.

P2. Matraca

Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{\frac{x}{2}}$

b) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}$

c) $\lim_{x\to 0} x\operatorname{sen}\frac{1}{x}$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(x))}{x^2}$

e) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-\frac{x}{2}}}{x}$

f) $\lim_{x\to 0}\cos(x)^{-\frac{1}{x^2}}$

g) $\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}$

h) $\lim_{x\to 0}\frac{(\cos(x)-1)^3\cot^4\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan^2(x)}$

P3. De controles

a) Determine, de existir, el siguiente límite. Si no existe debe demostralo también.

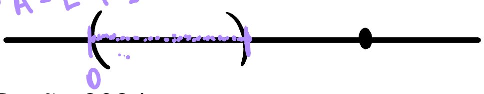
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(|\alpha x|)-|\beta x|}{x},\quad \text{Donde } \alpha>\beta>0$$

b) Sean $a,b\in\mathbb{R}_+\setminus\{0\}$ y $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida parcialmente según:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin(ax)}{bx} & \text{si } x<0\\ \frac{e^{bx}-1}{x} & \text{si } x>0\end{cases}$$

Encuentre una relación entre a y b para que $\lim_{x\to 0}f(x)$ exista.

$A = (0,1) \cup \{3\} \rightsquigarrow A' = [0,1]$



Resumen Auxiliar 13

Introducción al Cálculo - MA1001-9 - Otoño 2024

Gisela Abarca Andereya & Ignacio Dagach Abugattas ♡

Definición (Punto de Acumulación) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto cualquiera de $\mathbb{R}$. El real $\overline{x} \in \mathbb{R}$ se llama punto de acumulación de A si existe alguna sucesión $(x_n) \subseteq A$ (con valores en A) tal que $x_n \neq \overline{x}$, $\forall n \geq n_0$ algún $n_0 \in \mathbb{N}$ y $x_n \to \overline{x}$.

El conjunto de los puntos de acumulación de $A \subseteq \mathbb{R}$ se denota A'.

Definición Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea $\overline{x} \in A'$, es decir $\overline{x}$ es un punto de acumulación de A. Diremos que f tiende a $\ell \in \mathbb{R}$ cuando x tiende a $\overline{x}$ (lo cual se denotará $f(x) \to \ell$ cuando $x \to \overline{x}$), o bien que ℓ es el límite de $f(x)$ cuando $x \to \overline{x}$ (lo que se anota $\ell = \lim_{x \to \overline{x}} f(x)$) si para toda sucesión (x_n) con valores en A, convergente a $\overline{x}$ y tal que $x_n \neq \overline{x}$, se cumple que la sucesión de las imágenes $(f(x_n))$ es convergente a ℓ.

Teorema 12.1. *Si una función f tiene límite cuando $x \to \overline{x}$ entonces dicho límite es único.*

Definición Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\overline{x} \in \mathbb{R}$. Si denotamos por $A^+ = A \cap (\overline{x}, +\infty)$ y $A^- = A \cap (-\infty, \overline{x})$, entonces

i) Se llama límite lateral por la derecha de la función f en $\overline{x}$ a $\lim_{\substack{x \to \overline{x} \\ x \in A^+}} f(x)$.

ii) Análogamente, a $\lim_{\substack{x \to \overline{x} \\ x \in A^-}} f(x)$ se le llama límite lateral por la izquierda de la función f en $\overline{x}$.

El límite lateral por la derecha se denota por $\lim_{\substack{x \to \overline{x} \\ x > \overline{x}}} f(x)$ o $\lim_{x \to \overline{x}^+} f(x)$ y el limite lateral por la izquierda se denota por $\lim_{\substack{x \to \overline{x} \\ x < \overline{x}}} f(x)$ o bien por $\lim_{x \to \overline{x}^-} f(x)$.

Teorema 12.6 (Caracterización ε-δ de límite). *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\overline{x}$ punto de acumulación de A entonces*

$$\lim_{x \to \overline{x}} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A \cap ([\overline{x} - \delta, \overline{x} + \delta] \setminus \{\overline{x}\}),\quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

1. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

2. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

3. $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$

4. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$$\lim_{x \to \overline{x}} f(x) = \ell \iff \lim_{x \to \overline{x}^+} f(x) = \lim_{x \to \overline{x}^-} f(x) = \ell$$

Resumen Auxiliar 13
Introducción al Cálculo - MA1001-9 - Otoño 2024
Gisela Abarca Andereya & Ignacio Dagach Abugattas

Definición (Punto de Acumulación) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto cualquiera de $\mathbb{R}$. El real $\overline{x} \in \mathbb{R}$ se llama punto de acumulación de A si existe alguna sucesión $(x_n) \subseteq A$ (con valores en A) tal que $x_n \neq \overline{x}$, $\forall n \geq n_0$ algún $n_0 \in \mathbb{N}$ y $x_n \to \overline{x}$.

El conjunto de los puntos de acumulación de $A \subseteq \mathbb{R}$ se denota A'.

Definición Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea $\overline{x} \in A'$, es decir $\overline{x}$ es un punto de acumulación de A. Diremos que f tiende a $\ell \in \mathbb{R}$ cuando x tiende a $\overline{x}$ (lo cual se denotará $f(x) \to \ell$ cuando $x \to \overline{x}$), o bien que ℓ es el límite de $f(x)$ cuando $x \to \overline{x}$ (lo que se anota $\ell = \lim\limits_{x\to\overline{x}} f(x)$) si para toda sucesión (x_n) con valores en A, convergente a $\overline{x}$ y tal que $x_n \neq \overline{x}$, se cumple que la sucesión de las imágenes $(f(x_n))$ es convergente a ℓ.

Teorema 12.1. *Si una función f tiene límite cuando $x \to \overline{x}$ entonces dicho límite es único.*

Definición Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\overline{x} \in \mathbb{R}$. Si denotamos por $A^+ = A \cap (\overline{x}, +\infty)$ y $A^- = A \cap (-\infty, \overline{x})$, entonces

i) Se llama límite lateral por la derecha de la función f en $\overline{x}$ a $\lim\limits_{\substack{x\to\overline{x} \\ x\in A^+}} f(x)$.

ii) Análogamente, a $\lim\limits_{\substack{x\to\overline{x} \\ x\in A^-}} f(x)$ se le llama límite lateral por la izquierda de la función f en $\overline{x}$.

El límite lateral por la derecha se denota por $\lim\limits_{\substack{x\to\overline{x} \\ x>\overline{x}}} f(x)$ o $\lim\limits_{x\to\overline{x}^+} f(x)$ y el limite lateral por la izquierda se denota por $\lim\limits_{\substack{x\to\overline{x} \\ x<\overline{x}}} f(x)$ o bien por $\lim\limits_{x\to\overline{x}^-} f(x)$.

Teorema 12.6 (Caracterización ε-δ de límite). *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\overline{x}$ punto de acumulación de A entonces*

$$\lim_{x\to\overline{x}} f(x) = \ell \iff \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in A \cap ([\overline{x} - \delta, \overline{x} + \delta] \setminus \{\overline{x}\}),\quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

---

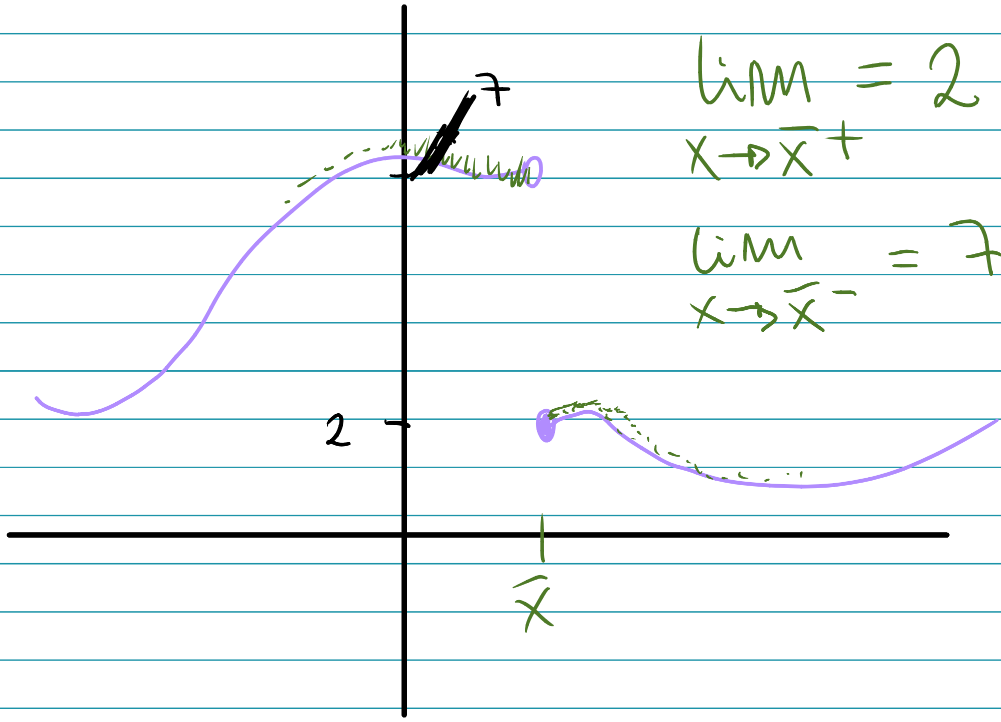
1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ ✓
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ ✓
3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1} = 1$ ✓
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ ✓

Definición Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\overline{x} \in \mathbb{R}$. Si denotamos por $A^+ = A \cap (\overline{x}, +\infty)$ y $A^- = A \cap (-\infty, \overline{x})$, entonces

i) Se llama límite lateral por la derecha de la función f en $\overline{x}$ a $\displaystyle\lim_{\substack{x \to \overline{x} \\ x \in A^+}} f(x)$.

ii) Análogamente, a $\displaystyle\lim_{\substack{x \to \overline{x} \\ x \in A^-}} f(x)$ se le llama límite lateral por la izquierda de la función f en $\overline{x}$.

El límite lateral por la derecha se denota por $\displaystyle\lim_{\substack{x \to \overline{x} \\ x > \overline{x}}} f(x)$ o $\displaystyle\lim_{x \to \overline{x}^+} f(x)$ y el limite lateral por la izquierda se denota por $\displaystyle\lim_{\substack{x \to \overline{x} \\ x < \overline{x}}} f(x)$ o bien por $\displaystyle\lim_{x \to \overline{x}^-} f(x)$.



$\displaystyle\lim_{x \to \overline{x}^+} = 2$

$\displaystyle\lim_{x \to \overline{x}^-} = 7.$

Teorema 12.6 (Caracterización ε-δ de límite). *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\overline{x}$ punto de acumulación de A entonces*

$$\lim_{x \to \overline{x}} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \underbrace{\forall x \in A \cap ([\overline{x} - \delta, \overline{x} + \delta] \setminus \{\overline{x}\}), \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon}_{[\forall x \in A : 0 < |x - \overline{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon]}.$$

HOW TO:

1) sea $\varepsilon > 0$ y $x \in \mathrm{Dom} f$ tq $0 < |x - \overline{x}| < \delta$
2) desarrollar $|f(x) - \ell|$
3) hacer aparecer el $|x - \overline{x}|$ y posteriormente el δ
4) imponer $\leq \varepsilon$
5) despejar δ.

P1. Para comenzar

a) Determine $\lim_{x\to 4}\sqrt{2x+1}$ usando la caracterización $\varepsilon-\delta$.

el límite debería ser 3.

PDQ

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, : [\forall x\in Dom(f): 0<|x-4|<\delta \Rightarrow |f(x)-3|\leq\varepsilon]$

sea $\varepsilon>0$ y sea $x\in Dom f$: $0<|x-4|<\delta$

$$|f(x)-3| = |\sqrt{2x+1}-3| = \left|\frac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)}{(\sqrt{2x+1}+3)}\right|$$

$$= \left|\frac{2x+1-9}{\sqrt{2x+1}+3}\right| = \left|\frac{2x-8}{\sqrt{2x+1}+3}\right| = \frac{2|x-4|}{|\sqrt{2x+1}+3|}$$

$$\frac{2|x-4|}{\sqrt{2x+1}+3}$$

$\boxed{\text{como } \cdot \sqrt{2x+1}+3 \geq 3 \quad \cdot |x-4| \leq \delta}$

$$\leq \frac{2\delta}{3} \overset{!}{\leq} \varepsilon$$

si $\frac{2\delta}{3}\leq\varepsilon$, $\delta\leq\frac{3\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow$ BASTA TOMAR $\delta=\frac{3\varepsilon}{2}$.

COMO $\varepsilon>0$ ERA ARBITRARIO, CONCLUIMOS.

b) Sea A un subconjunto denso numerable de $\mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua que cumple que $f(a) = 0$ $\forall a \in A$. Demuestre que $f \equiv 0$.

c) Sea $C = (-\infty, 0) \cup \{32\}$. Demuestre que $0 \in C'$, pero que $32 \notin C'$.

PROPUESTAS

b) PDQ $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.

sea $x \in \mathbb{R}$.

si $x \in A$ ✓

sino: aproximamos

si f continua

$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$

c) contradicción y hacerla con la propia definición

P2 Hint: exponente feo $\Rightarrow$ exp(ln(·))

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{\frac{x}{2}}$

$$\parallel$$

$$\lim_{x\to\infty} \exp\left(\ln\left[\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{\frac{x}{2}}\right]\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} \exp\left[\frac{x}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)\right]$$

Como exp es continua, veamos $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$

Como hay ln, tratamo de armar límite conocido.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$$

tratar de armar este

3. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

CV: $x-1=u$

$x=u+1$

$x\to 1$

$u\to 0^+$

$$\boxed{\lim_{u\to 0^+} \frac{\ln(1+u)}{u}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-2+2}{2}\ln\left(\frac{x-2+3}{x-2}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{2}\ln\left(1+\frac{3}{x-2}\right) + 1\cdot\ln\left(1+\frac{3}{x-2}\right)$$

cuando $x\to\infty$

$\to$ $1\cdot\ln(1)=0$

Notar que $\lim\limits_{x\to\infty} 1\cdot\ln\left(1+\frac{3}{x-2}\right)=0$

$\Rightarrow$ veamos el term. de la izq

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{2} \ln\left(1+\frac{3}{x-2}\right)$$

$$\boxed{\lim_{u\to 0^+} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1}$$

estamos casi, $\boxed{u = \frac{3}{x-2}}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{3}{x-2}\right)}{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{2}\ln\left(1+\frac{3}{x-2}\right)}{\frac{3}{x-2}}$$

$$\boxed{\text{sea } u = \frac{3}{x-2}, \quad \text{si } x\to\infty \quad u\to 0^+}$$

$$= \lim_{u\to 0^+} \underbrace{\frac{3}{2}}_{3/2} \underbrace{\frac{\ln(1+u)}{u}}_{1} = \frac{3}{2}\cdot 1 = 3/2$$

como $\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{2} \ln\left(1+\frac{3}{x-2}\right) = 3/2$

y como $\lim_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{3}{x-2}\right) = 0$

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{x-2}{2}\ln\left(1+\frac{3}{x-2}\right) + \ln\left(1+\frac{3}{x-2}\right)\right] = \underbrace{3/2}_{3/2} + 0$$

luego $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \frac{3}{2}$

como exp es continua

$$\lim_{x\to\infty} \exp\left(\frac{x}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)\right) = \exp\left(\lim(\text{----})\right)$$

$$= \exp(3/2).$$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$

$$e^{-x}$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \xrightarrow{x\to\infty} 0.$$

$$\|$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln[e^x(e^{-x}+1)]}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{\ln e^x}{x} + \frac{\ln(e^{-x}+1)}{x}\right]$$

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{x}{x} + \frac{1}{x}\ln(e^{-x}+1)\right]$$

$$\lim_{x\to\infty} \left[\underset{1}{1} + \underset{0}{\left(\frac{1}{x}\right)} \ln(\underset{0}{e^{-x}}+1)\right]$$

$\ln(1)=0$

$\ln(e^{-x}+1) \to 0$ (ln es continuo)

Como $1 \to 1$ ✓

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{1}{x}\right) \to 0 \\ \ln(e^{-x}+1) \to 0 \end{array}\right\} \frac{1}{x}\ln(e^{-x}+1) \to 0 \ ✓$$

$$\lim_{x\to\infty} 1 + \frac{1}{x}\ln(e^{-x}+1) = 1 + 0 = 1$$

c) $\lim_{x\to 0} x\,\text{sen}\frac{1}{x}$

$$\frac{\text{sen}(u)}{u} \xrightarrow{u\to 0} 1$$

$\parallel$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

sea $u=\frac{1}{x}$, si $x\to 0$, $u\to\infty$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\text{sen}(u)}{u}$$

RAYOS!!! ...

COMO $x \xrightarrow{x\to 0} 0$

$$-1 \leq \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

$\lim_{x\to 0} x\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ por NULA y ACOTADA.

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(x))}{x^2}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$

$\parallel$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(x))}{[1-\cos(x)]} \underbrace{\dfrac{[1-\cos(x)]}{x^2}}_{\textcircled{*}}$ $\frac{1}{2}$

NOTAR que $\textcircled{*}$ es 2.

VEAMOS

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{1-\cos(x)} = -\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{\cos(x)-1}$$

sea $u=\cos(x)$
$u \to 1$ si $x \to 0$

$$= -\lim_{u\to 1} \frac{\ln(u)}{u-1} = -1$$

COMO $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(x))}{1-\cos(x)} = -1$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

el límite de la multiplicación es la multiplicación de los límites $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(x))}{x^2} = -\dfrac{1}{2}.$

e)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{x^2}}{x}$$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$$\parallel$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - (e^{x^2} - 1)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} - \frac{e^{x^2} - 1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{e^x - 1}{x} - \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \cdot x \right]$$

CV $x^2 = u$

$x \to 0$

$u \to 0$

|| HACER Álgebra de límites ||

luego

$$\lim \frac{e^x - e^{x^2}}{x} = 1 - 1 \cdot 0 = 1.$$

f) $$\lim_{x\to 0} \cos(x)^{-\frac{1}{x^2}}$$

4

$$\lim_{x\to 0} \exp\left(\ln\left(\cos(x)^{-\frac{1}{x^2}}\right)\right)$$

(continuidad de e^x

$$\exp\left(\underbrace{\lim_{x\to 0}\left[-\frac{\ln(\cos(x))}{x^2}\right]}_{=\,--\frac{1}{2}\,=\,\frac{1}{2}\ \text{por d)}}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \cos(x)^{-\frac{1}{x^2}} = \exp\left(\frac{1}{2}\right)$$

g) $\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{x-1}$

4. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$u = x-1$
$x \to 1$
$u \to 0$

$$\lim_{u\to 0} \frac{e^{u+1} - e}{u}$$

$$\lim_{u\to 0} \frac{e\cdot e^u - e}{u}$$

$$\lim_{u\to 0} \frac{e(e^u - 1)}{u}$$

e

1

Por Álg. de límites

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{x-1} = e \cdot 1 = e.$$

h) $$\lim_{x\to 0} \frac{(\cos(x)-1)^3 \cot^4\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan^2(x)}$$

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

2. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{(\cos(x)-1)^3}{1} \cdot \frac{\cos^4\left(\frac{x}{2}\right)}{1} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}^4\left(\frac{x}{2}\right)}}{\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{1} \cdot \frac{1}{\cos^2(x)}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{(\cos(x)-1)^3}{x^6} \cdot \frac{\cos^4\left(\frac{x}{2}\right)}{1} \cdot \frac{x^4}{\operatorname{sen}^4\left(\frac{x}{2}\right)}}{\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{1} \cdot \frac{1}{\cos^2(x)}} \quad x^2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{\cos(x)-1}{x^2}\right)^3 \cdot \frac{\cos^4\left(\frac{x}{2}\right)}{1} \cdot \frac{\frac{x^4}{2^4}}{\operatorname{sen}^4\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot 2^4}{\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{\cos^2(x)}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{\cos(x)-1}{x^2}\right)^3 \cdot \frac{\cos^4\left(\frac{x}{2}\right)}{1} \cdot \left(\frac{\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^4 \cdot 2^4}{\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{\cos^2(x)}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\underbrace{\left(\frac{\cos(x)-1}{x^2}\right)^3}_{\to\left(-\frac{1}{2}\right)^3} \cdot \underbrace{\frac{\cos^4\left(\frac{x}{2}\right)}{1}}_{\to(1)^4} \cdot \underbrace{\left(\frac{\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^4}_{\to(1)^4} \cdot \underbrace{2^4}_{\to 2^4}}{\underbrace{\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)^2}_{\to(1)^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos^2(x)}}_{\to(1)^2}}$$

CV: $\frac{x}{2}=u$

Luego, por Álgebra de límites:

$$\lim_{x\to 0}[\quad] = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cancel{(1)^4}\,\cancel{(1)^4}\, 2^4}{\cancel{(1)^2}\,\cancel{(1)^2}} = -2.$$

$\to -2^3$

P3. De controles

a) Determine, de existir, el siguiente límite. Si no existe debe demostralo también.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(|\alpha x|)-|\beta x|}{x}, \quad \text{Donde } \alpha>\beta>0$$

TEOREMA

$$\lim_{x\to\bar{x}} f(x)=\ell \iff \lim_{x\to\bar{x}^+} f(x) = \lim_{x\to \bar{x}^-} f(x)=\ell.$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}|\alpha x|-|\beta x|}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}(\alpha x)-\beta x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\underbrace{\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{\alpha x}}_{\to 1}\underbrace{\alpha}_{\to\alpha}-\underbrace{\beta}_{\to\beta} = \alpha-\beta$$

por Ály de límites

o

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}|\alpha x|-|\beta x|}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}(-\alpha x)- -\beta x}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(-\alpha x)}{x}+\beta$$

$$=\lim_{x\to 0} -\frac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{\alpha x}\cdot\alpha+\beta$$

$$=\lim_{x\to 0} \underbrace{-}_{\to -1}\underbrace{\frac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{\alpha x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\alpha}_{\to\alpha}+\underbrace{\beta}_{\to\beta} = -\alpha+\beta=\beta-\alpha$$

Ály de Límite

luego $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \alpha-\beta \neq \beta-\alpha = \lim_{x\to 0^-} f(x)$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)$ NO existe.

b) Sean $a, b \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida parcialmente según:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{bx} & \text{si } x < 0 \\ \frac{e^{bx}-1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Encuentre una relación entre a y b para que $\lim_{x\to 0} f(x)$ exista.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
3. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Como, $\lim\limits_{x\to \overline{x}} f(x) = \ell \iff \lim\limits_{x\to \overline{x}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to \overline{x}^-} f(x) = \ell.$

queremos encontrar una relación, entre a y b tq los límites laterales sean iguales

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{bx}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{bx}-1}{bx} \cdot b = 1 \cdot b = b$$

CV: $u = xb$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{bx} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{a \cdot x} \cdot \frac{a}{b} = 1 \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

luego la condición es que $b = \frac{a}{b}$

es decir $b^2 = a$.