Auxiliar 11: Sucesiones III

Profesor: Matias Pavez Signe
Auxiliares: Gisela Abarca Andereya,
Ignacio Dagach Abugattas

P1. Para comenzar... ¿el C4?

Dadas las siguientes sucesiones:

- $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $s_n = \sqrt{n+\frac{1}{n}} - \sqrt{n}$
- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $b_n = \sqrt{5 + |a_n|\cos^2(1+\sqrt{2}n) + \sin(a_n + \sqrt{3}n)}$ y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada
- $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $c_n = (\sqrt{n+\frac{1}{n}} - \sqrt{n})b_n^3$

a) Determine para $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, por definición, su límite

b) Demuestre que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es nula

P2. Matraca

Calculelos siguientes límites:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{3n+1}{3n-1})^n$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2+(-1)^n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (1+e^n)^{1/n}$

P3. De controles

Sea a > 0 y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida recursivamente según:

- $x_{n+1} = \sqrt{a+x_n}$ con $x_1 = \sqrt{a}$

a) Demuestre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y no negativa

b) Demuestre que $x_n \leq u,\ \forall n \in \mathbb{N}$, con u el único valor tal que $u^2 = u + a$

c) Concluya que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posee límite y calcúlelo

Resumen Auxiliar 11
Introducción al Cálculo - MA1001-9 - Otoño 2024
Gisela Abarca Andereya & Ignacio Dagach Abugattas

DEFINICIÓN (SUCESIÓN) Una sucesión real es una función:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto f(n) \end{aligned}$$

$f(x) \sim f(n) \sim f_n \sim S_n$

DEFINICIÓN (CONVERGENCIA) Diremos que la sucesión (s_n) converge a ℓ o bien que los términos s_n tienden a ℓ (lo cual anotaremos $s_n \to \ell$) si se cumple que:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ s_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon].$$

Teorema 9.1. *Si (s_n) es una sucesión que converge a $\ell_1 \in \mathbb{R}$ y también a $\ell_2 \in \mathbb{R}$, entonces necesariamente $\ell_1 = \ell_2$.*

DEFINICIÓN (DEFINICIÓN DE LÍMITE DE UNA SUCESIÓN) Si (s_n) es una sucesión que converge a ℓ, entonces ℓ se llama *límite* de la sucesión, lo cual se anotará:

$$\ell = \lim s_n \quad \text{o bien} \quad \ell = \lim_n s_n \quad \text{o bien} \quad \ell = \lim_{n \to \infty} s_n.$$

DEFINICIÓN (DEFINICIÓN DE SUCESIÓN NULA) (s_n) se llamará sucesión nula si $s_n \to 0$.

DEFINICIÓN (SUCESIÓN ACOTADA) (s_n) se llamará sucesión acotada si

$$(\exists M > 0)\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad |s_n| \leq M.$$

Teorema 9.2. *Sean (u_n), (v_n) sucesiones. Las siguientes proposiciones son ciertas*

1. *(u_n) es nula si y sólo si $(|u_n|)$ es nula.*
2. *Si (u_n) es una sucesión nula entonces (u_n) es una sucesión acotada.*
3. *Si (u_n) es una sucesión nula y $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $|v_n| \leq u_n$ entonces (v_n) es una sucesión nula.*
4. *Si (u_n) y (v_n) son sucesiones nulas entonces $(u_n + v_n)$ y $(u_n \cdot v_n)$ son sucesiones nulas.*
5. *Si (u_n) y (v_n) son sucesiones acotadas entonces $(u_n + v_n)$ y $(u_n \cdot v_n)$ son sucesiones acotadas.*
6. *Si (u_n) es una sucesión nula y (v_n) es una sucesión acotada entonces $(u_n \cdot v_n)$ es una sucesión nula. Un caso particular de esto es cuando $v_n = c$ constante.*

Resumen Auxiliar 11
Introducción al Cálculo - MA1001-9 - Otoño 2024
Gisela Abarca Andereya & Ignacio Dagach Abugattas

Proposición 9.1. *Sea* (s_n) *una sucesión de números reales entonces* $s_n \to \ell \iff (s_n - \ell)$ *es una sucesión nula.*

Proposición 9.2. *Sea* (s_n) *una sucesión de números reales. Si* (s_n) *es convergente entonces* (s_n) *es acotada.*

Proposición 9.3 (Álgebra de límites). *Sean* (u_n) *y* (v_n) *dos sucesiones convergentes a* u *y* v*, respectivamente. Sea* $\lambda \in \mathbb{R}$*, entonces las sucesiones* $(u_n + v_n)$*,* $(u_n - v_n)$*,* $(u_n \cdot v_n)$ *y* (λu_n) *son también convergentes a* $u + v$*,* $u - v$*,* $u \cdot v$ *y* λu*, respectivamente.*

Es decir, si $u_n \to u$ *y* $v_n \to v$ *entonces:*

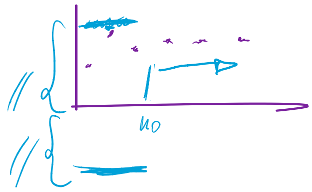
- $\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n$
- $\lim(u_n - v_n) = \lim u_n - \lim v_n$
- $\lim(u_n \cdot v_n) = \lim u_n \cdot \lim v_n$
- $\lim(\lambda u_n) = \lambda \lim u_n$.

si no fuera así

$$\left.\begin{array}{l}\lim_n (n-n) = \lim_n (0) = 0 \\ \quad \| \\ \lim_n n - \lim_n n = \text{indet}\end{array}\right\} \text{MALO}$$

Proposición 9.4. *Si* (s_n) *es una sucesión nula entonces la sucesión* $\left(\frac{1}{s_n}\right)$*, de estar bien definida, es no acotada y en consecuencia no es convergente.*

sea ε



Proposición 9.6. *Sea* (s_n) *una sucesión real. Si* (s_n) *converge a* $\ell \neq 0$ *entonces:*

(1) $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)$ *tal que* s_n *tiene el mismo signo de* ℓ *(es decir* $s_n \cdot \ell > 0$ *).*

(2) La sucesión $\left(\frac{1}{s_n}\right)$ *es acotada.*

Proposición 9.7. *Sean* (u_n) *y* (v_n) *dos sucesiones convergentes a* u *y* v *respectivamente. Si* $v \neq 0$*, la sucesión* (u_n/v_n) *es convergente a* (u/v)*.*

Es decir

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}.$$

- $s_n = a$, para $a \in \mathbb{R}$, satisface $\lim s_n = a$.
- $\lim \frac{1}{n} = 0$.
- $\lim \frac{1}{n^k} = 0$, para $k \in \mathbb{N}$.
- $s_n = n^k$, para $k \in \mathbb{N}$, no es acotada luego diverge.
- $$s_n = \frac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \cdots + b_1 n + b_0},$$
  para $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
  - si $p < q$, entonces $s_n \to 0$ $\frac{1}{100}$
  - si $p = q$, entonces $s_n \to \frac{a_p}{b_q}$
  - si $p > q$, entonces $\left(\frac{1}{s_n}\right) \to 0$. Entonces (s_n) no es acotada y luego diverge. $\frac{100}{1}$
- $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$.
- $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$, para $a \in \mathbb{R}$.

Resumen AUX 11 (GRACIAS GISE ☺)

- **Teorema**: Sean (u_n) y (w_n) sucesiones convergentes a u y w, respectivamente. Si existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple que

$$u_n \leq w_n$$

entonces $u \leq w$.

- **Teorema del Sandwich**: Sean (u_n), (v_n) y (w_n) sucesiones reales. Si (u_n) y (w_n) convergen al real ℓ y además tal que

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \geq n_0)\,u_n \leq v_n \leq w_n,$$

entonces la sucesión (v_n) también converge y $\lim v_n = \ell$.

- **Desigualdad de Bernoulli I**:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall h > -1)(1+h)^n \geq 1 + nh$$

- **Propiedad(Sucesión q^n)**:
  1. $\lim q^n = 1$, si $q = 1$ $\lim 1^n = \lim 1 = 1$
  2. $\lim q^n = 0$, si $|q| < 1$ $\lim_n 0{,}5^n = \lim_n \underbrace{0{,}5 \cdots 0{,}5}_{n \text{ veces}}$
  3. $\lim q^n$ no existe si $q \in (-\infty, -1] \cup (1, \infty)$ $\lim 2^n$

- **Propiedad(Sucesión$(q_n)^n$)**: Para $q \to q$
  1. $\lim (q_n)^n = 0$, si $|q| < 1$
  2. $\lim (q_n)^n$ no existe, si $|q| > 1$ ✓

- **Propiedades:**
  - $\lim \sqrt[n]{a} = 1$, para $a \in \mathbb{R}^+$
  - $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$, para $a_n \to a \in \mathbb{R}^+$

- **Desigualdad de Bernoulli II**:

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,(h > 0), (1+h)^n \geq q + nh + \tfrac{n(n-1)}{2}h^2$$

o equivalentemente,

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall h > 0)\tfrac{1}{(1+h)^n} \leq \tfrac{1}{1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2}$$

- **Propiedades:**
  - $\lim \sqrt[n]{n} = 1$
  - $\lim n^k q^n = 0$ para $k \in \mathbb{N}$ y $q \in (-1, 1)$

- **Desigualdad de Bernoulli III**:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall u \in (-1, \tfrac{1}{n})), (1+u)^n \leq \tfrac{1}{1-nu}$$

- **Proposición**: Se tiene que

$$\lim (1 + h_n)^n = 1$$

cuando (h_n) y (nh_n) son sucesiones nulas.

- **Definición**: Sea (s_n) una sucesión real. Entonces:
  - Diremos que (s_n) es una sucesión creciente a partir de n_0 si $\forall n \geq n_0$ se tiene que $s_{n+1} \geq s_n$.
  - Diremos que (s_n) es una sucesión decreciente a partir de n_0 si $\forall n \geq n_0$ se tiene que $s_{n+1} \leq s_n$.
  - Si una sucesión es creciente, decreciente, estrictamente creciente o estrictamente decreciente, entonces la llamarmos sucesión monótona.

- **Teorema de las sucesiones monótonas**:
  - Si (s_n) es una sucesión (estrictamente) creciente a partir de n_0 y acotada superiormente entonces es convergente y

$$\lim s_n = sup\{s_n : n \geq n_0\}$$

  - Si (s_n) es una sucesión (estrictamente) decreciente a partir de n_0 y acotada inferiormente entonces es convergente y

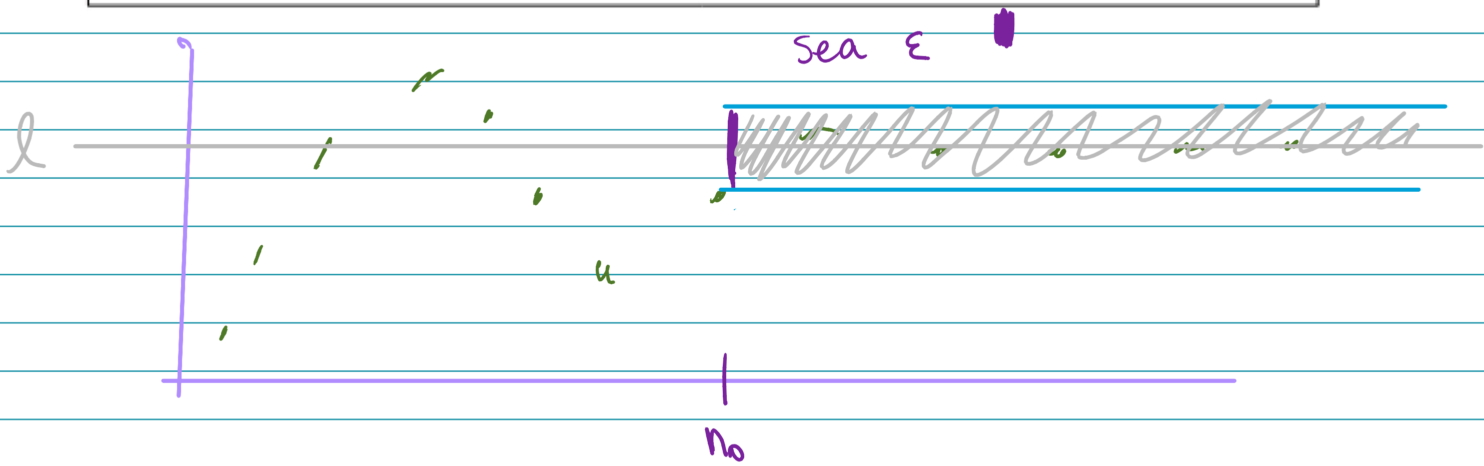
$$\lim s_n = inf\{s_n : n \geq n_0\}$$

- **El número e**: $s_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ es una sucesión creciente y acotada superiormente cuyo límite es $\lim (1 + \frac{1}{n})^n = e$.

$$\lim_n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Definición (Convergencia) Diremos que la sucesión (s_n) converge a ℓ o bien que los términos s_n tienden a ℓ (lo cual anotaremos $s_n \to \ell$) si se cumple que:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ s_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon].$$

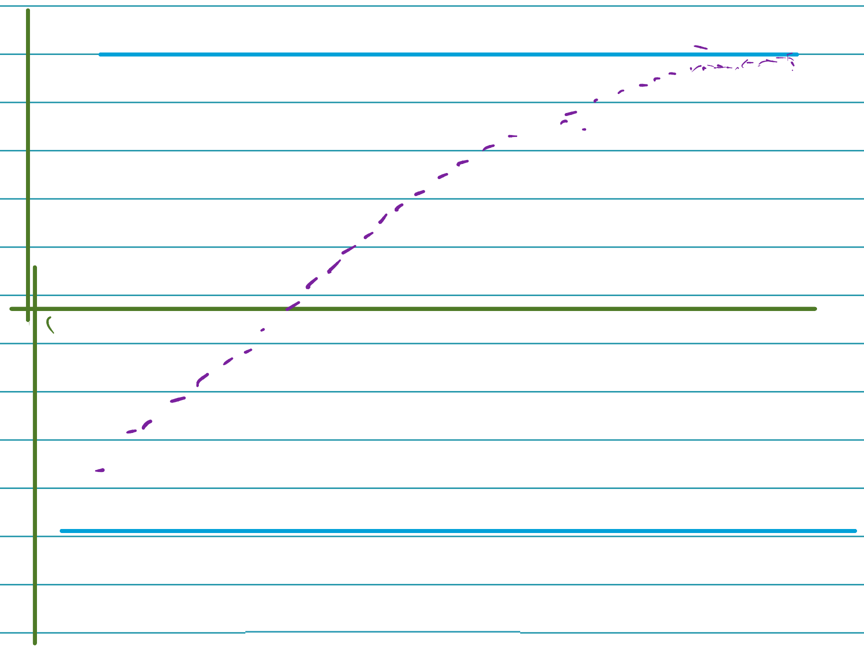


- **Teorema de las sucesiones monótonas**:
  - Si (s_n) es una sucesión (estrictamente) creciente a partir de n_0 y acotada superiormente entonces es convergente y

    $$\lim s_n = sup\{s_n : n \geq n_0\}$$

  - Si (s_n) es una sucesión (estrictamente) decreciente a partir de n_0 y acotada inferiormente entonces es convergente y

    $$\lim s_n = inf\{s_n : n \geq n_0\}$$



P1. Para comenzar... ¿el C4?

Dadas las siguientes sucesiones:

- $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $s_n = \sqrt{n+\frac{1}{n}} - \sqrt{n}$
- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $b_n = \sqrt{5+|a_n|\cos^2(1+\sqrt{2}n)+\sin(a_n+\sqrt{3}n)}$ y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada
- $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $c_n = (\sqrt{n+\frac{1}{n}} - \sqrt{n})b_n^3$

a) Determine para $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, por definición, su límite ✓ el límite es 0

b) Demuestre que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es nula

$\frac{1}{n} \to 0$

$n+\frac{1}{n} \sim n$

$\sqrt{n+\frac{1}{n}} \sim \sqrt{n}$

$S_n = \sqrt{n+\frac{1}{n}} - \sqrt{n}$

$S_n \to 0$

PDQ: $\forall \varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0\ |S_n - 0| \leq \varepsilon$

sea $\varepsilon>0$, estudiemos $|S_n - 0|$

$$\left|\sqrt{n+\tfrac{1}{n}} - \sqrt{n} - 0\right| = \left|\sqrt{n+\tfrac{1}{n}} - \sqrt{n}\right|^{>0} = \sqrt{n+\tfrac{1}{n}} - \sqrt{n}$$

$n+\frac{1}{n} > n$

$\sqrt{n+\frac{1}{n}} > \sqrt{n}$

$$\left(\sqrt{n+\tfrac{1}{n}} - \sqrt{n}\right)\frac{\left(\sqrt{n+\frac{1}{n}}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+\frac{1}{n}}+\sqrt{n}\right)} = \frac{n+\frac{1}{n}-n}{\left(\sqrt{n+\frac{1}{n}}+\sqrt{n}\right)} = \frac{1/n}{\left(\sqrt{n+\frac{1}{n}}+\sqrt{n}\right)}$$

NOTAR que $\sqrt{n+\frac{1}{n}}+\sqrt{n} \geq 1$

$$\frac{1/n}{\left(\sqrt{n+\frac{1}{n}}+\sqrt{n}\right)} \leq \frac{1/n}{1} = \frac{1}{n} \leq \varepsilon$$

$\Longrightarrow$ concluir directamente por P.A.

$\Longrightarrow \frac{1}{\varepsilon} \leq n \Longrightarrow n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$

$\forall n \geq n_0 \quad \frac{1}{\varepsilon} \leq n$

$\frac{1}{\varepsilon} \leq \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1+1+1+1+1 \ldots\ldots$

- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $b_n = \sqrt{5 + |a_n|\cos^2(1+\sqrt{2}n) + \sin(a_n + \sqrt{3}n)}$ y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada
- $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $c_n = (\sqrt{n+\frac{1}{n}} - \sqrt{n})b_n^3$

PDQ $(b_n)_n$ es acotada y que $(c_n)_n$ es nula.

NOTAR que:

1) $\exists M>0$ tq $|a_n| \leq M$, $\forall n$
2) $-1 \leq \sin(\ \cdot\ ) \leq 1$
3) $0 \leq \cos^2(\ \cdot\ ) \leq 1$

$\Rightarrow$

$$* \quad 5 + \underbrace{|a_n|}_{\leq M \ (1)}\underbrace{\cos^2(1+\sqrt{2}n)}_{\leq 1 \ (3)} + \underbrace{\sin(a_n+\sqrt{3}n)}_{\leq 1 \ (2)} \leq 5 + M\cdot 1 + 1 = 6+M$$

$$(\star) \quad 4 = 5 + |a_n|\cdot 0 + (-1) \leq 5 + |a_n|\underbrace{\cos^2(1+\sqrt{2}n)}_{0\leq} + \underbrace{\sin(a_n+\sqrt{3}n)}_{-1\leq}$$

$\Rightarrow$ POR $*$, $(\star)$

$$4 \leq 5 + |a_n|\cos^2(1+\sqrt{2}n) + \sin(a_n+\sqrt{3}n) \leq 6+M$$

APLICANDO RAÍZ $\quad 2 \leq b_n \leq \sqrt{6+M}$

$$-\sqrt{6+M} \leq 0 \leq 2 \leq b_n \leq \sqrt{6+M}$$

$$-\sqrt{6+M} \leq b_n \leq \sqrt{6+M}$$

$$|b_n| \leq \sqrt{6+M} \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

$\Rightarrow (b_n)_n$ es ACOTADA (POR $\sqrt{6+M}$)

PDQ $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es NULA.

$$C_n = \left(\sqrt{n+\frac{1}{n}} - \sqrt{n}\right) b_n^3$$

PDQ $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es NULA.

$$C_n = \underbrace{\left(\sqrt{n+\frac{1}{n}} - \sqrt{n}\right)}\, b_n^3$$

NOTAR que

$$C_n = S_n \; b_n^3$$

NULA ACOTADA?? Si

Si b_n es ACOTAdo

$$2 \leq b_n \leq \sqrt{6+M}$$

$$\Rightarrow 8 \leq b_n^3 \leq \sqrt{6+M}^{\,3}$$

$$-\left(\sqrt{6+M}^{\,3}\right) \leq b_n^3 \leq \sqrt{6+M}^{\,3}$$

$$|b_n^3| \leq \sqrt{6+M}^{\,3} \Rightarrow (b_n^3)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es ACOTAda}$$

$\Rightarrow$ C_n es de la forma

NULA · ACOTADA

$\Rightarrow$ C_n es nula //

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^n$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+(-1)^n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+e^n)^{1/n}$

a)

$$\frac{(3n+1)^n}{(3n-1)^n} = \frac{(3n+1)^n}{(3n-1)^n}\,\frac{(3n)^n}{(3n)^n}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a\cdot d}{b\,c} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

$$= \frac{{}^{a}(3n+1)^n}{{}_{b}(3n)^n}\cdot\frac{(3n)^n\,{}^{d}}{(3n-1)^n\,{}_{c}}$$

$$= \frac{\left(\frac{3n+1}{3n}\right)^n}{\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^n} = \frac{\left(1+\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{n}\right)^n \to e^{\frac{1}{3}}}{\left(1+\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{n}\right)^n \to e^{\left(-\frac{1}{3}\right)}}$$

$\lim\limits_{n}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

POR Álg de límites

$$\left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^n \longrightarrow \frac{e^{1/3}}{e^{-1/3}} = e^{1/3}\,e^{1/3} = e^{2/3}.$$

$\Rightarrow$ el límite de P2 a) es $e^{2/3}$

b) $\sqrt[n]{2+(-1)^n}$

NOTAR que $-1 \leq (-1)^n \leq 1$

$1 \leq 2+(-1)^n \leq 3$

$\Rightarrow \sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{2+(-1)^n} \leq \sqrt[n]{3}$

COMO $\sqrt[n]{1}, \sqrt[n]{3} \to 1$

POR TEO del SAND $\sqrt[n]{2+(-1)^n} \to 1.$

c) $\lim (1+e^n)^{1/n}$

NOTAR que $0 \leq e^{-n} = \frac{1}{e^n} \leq 1 \quad \forall n$

NOTAR que $(1+e^n) = e^n(e^{-n}+1)$

$\Rightarrow (1+e^n)^{1/n} = \left(e^n(e^{-n}+1)\right)^{1/n}$

$= e\,(e^{-n}+1)^{1/n}$

VEAMOS AHORA $\lim (e^{-n}+1)^{1/n}$

$0 \leq e^{-n} = \frac{1}{e^n} \leq 1 \quad \forall n$

0

$\leq$

$e^{-n}+1$

$\leq$

1

$\Rightarrow 0+1 \leq e^{-n}+1 \leq 2$

$\sqrt[n]{1} \leq (e^{-n}+1)^{1/n} \leq \sqrt[n]{2}$

POR SAND $(e^{-n}+1)^{1/n} \to 1$

c) $\lim \left(1+e^{n}\right)^{1/n}$

$$\Rightarrow \quad \left(1+e^{n}\right)^{1/n} = \underset{\nearrow e}{e} \cdot \left(\underset{\nearrow 1}{e^{-n}+1}\right)^{1/n}$$

POR Âlg de Limites

$$\lim \left(1+e^{n}\right)^{1/n} = \lim e\left(e^{-n}+1\right)^{1/n} = e \cdot 1 = e$$

P3. De controles

Sea a > 0 y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida recursivamente según:

- $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$ con $x_1 = \sqrt{a}$

a) Demuestre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y no negativa

b) Demuestre que $x_n \leq u$, $\forall n \in \mathbb{N}$, con u el único valor tal que $u^2 = u + a$, $u>0$

c) Concluya que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posee límite y calcúlelo

P3) a) PDQ $\forall n\in\mathbb{N}$, $0\leq x_n \leq x_{n+1}$

POR inducción

CB n=1) COMO $0<a$, $0<\sqrt{a}=x_1$ (1)

COMO $0<\sqrt{a}$, $a<a+\sqrt{a}$

$\Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{a+\sqrt{a}}$

$x_1 < \sqrt{a+x_1} = x_2$ (2)

$\underset{(1)\,y\,(2)}{\Longrightarrow}$ $0\leq x_1 \leq x_2$.

DEMOSTRANDO el CASO BASE.

HI SUPONGAMOS SE CUMPLE HASTA $n\in\mathbb{N}$ $0\leq x_n \leq x_{n+1}$ (3)

PDQ $0\leq x_{n+1}\leq x_{n+2}$

POR (3) $0\leq x_{n+1}$ (4)

COMO $\underset{(3)}{x_n \leq x_{n+1}}$, $a+x_n \leq a+x_{n+1}$

$\sqrt{a+x_n} \leq \sqrt{a+x_{n+1}}$

$x_{n+1} \leq x_{n+2}$ (5)

$\underset{(4),(5)}{\Longrightarrow}$ $0\leq x_{n+1} \leq x_{n+2}$

demostrando que $\forall n\in\mathbb{N}$, $0\leq x_n\leq x_{n+1}$

b) PDQ $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq U$,

con $U > 0$ fijo, única solución de $U^2 = a + U$

por inducción,

CB $(n=1)$ $\quad x_1 = \sqrt{a}$

$\Rightarrow$ como $U > 0$, $a < a + U \Rightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{a+U}$

$\Rightarrow x_1 = \sqrt{a} \leq \sqrt{a+U} = \sqrt{U^2} = U.$

$\Rightarrow x_1 \leq U$ //

HI/ sup se cumple hasta $n \in \mathbb{N}$. $\quad x_n \leq U$

PDQ $\quad x_{n+1} \leq U$

$x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$

(como $x_n \leq U$, $a + x_n \leq a + U \Rightarrow \sqrt{a+x_n} \leq \sqrt{a+U}$)

$\Rightarrow x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} \leq \sqrt{a+U} = \sqrt{U^2} = U$

$\Rightarrow x_{n+1} \leq U$ //

Concluyendo que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq U$.

c) PDQ $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y calcule su límite.

$\Rightarrow$ como X_n es creciente (a) y acotada (b), X_n converge a, digamos, $l \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} X_{n+1} = l$$

$$\lim X_{n+1} = l$$

$$\lim \sqrt{a+X_n} = l$$

$$\sqrt{\lim(a+X_n)} = l$$

$$\sqrt{a+\lim X_n} = l$$

$$\sqrt{a+l} = l$$

Álgebra de límites

$$l^2 = a + l$$

$$1l^2 - l - a = 0$$

$$l_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4(1)(-a)}}{2}$$

$$\Rightarrow l_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$$

$$\Rightarrow l_1 = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} > 0$$

$$l_2 = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2} < 0$$

$\Rightarrow$ con $(X_n)_n$ es no negativa (a), su límite no puede ser negativo, $\Rightarrow l_2$ se descarta

$$\Rightarrow l = l_1 = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$$