



Auxiliar 9: Sucesiones

Profesor: Matias Pavez Signe
Auxiliares: Gisela Abarca Andereya,
Ignacio Dagach Abugattas

P1. Para comenzar

Dadas las siguientes sucesiones:

- $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donde $s_n = \frac{n^2}{2n^2+1}$
 - $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donde $a_n = \sqrt{1 + \frac{b}{n}}$, $b \in \mathbb{N}, b > 0$
- a) Determine para cada una, por definición, su límite. (ℓ_s y ℓ_a respectivamente)
- b) Para $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ encuentre un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N}, |s_n - \ell_s| \leq 0,0002$
- c) Para $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ encuentre un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N}, |a_n - \ell_a| \leq \frac{1}{1001}$

Hint: Considere que $\frac{\sqrt{5000}}{2} \in (35, 36) \subseteq \mathbb{R}$:

P2. Matraca

Calcule, utilizando la materia a evaluar en el C4, los siguientes límites:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n!) + 2n^2}{3n^2 + 4}$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - \sqrt{1 + \frac{3}{n}})$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(-1)^n}{5 - (n-2)^3}$
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+5} - \sqrt{n+1})\sqrt{n+2}$



P3. De controles

Sean $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ dos sucesiones donde $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$. Demuestre que si $(a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$, entonces $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \ell$.

$$f(x) \\ s_n = s(n)$$

DEFINICIÓN (SUCESIÓN) Una sucesión real es una función:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto f(n) \end{aligned}$$

DEFINICIÓN (CONVERGENCIA) Diremos que la sucesión (s_n) converge a ℓ o bien que los términos s_n tienden a ℓ (lo cual anotaremos $s_n \rightarrow \ell$) si se cumple que:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) s_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon].$$

Teorema 9.1. Si (s_n) es una sucesión que converge a $\ell_1 \in \mathbb{R}$ y también a $\ell_2 \in \mathbb{R}$, entonces necesariamente $\ell_1 = \ell_2$.

DEFINICIÓN (DEFINICIÓN DE LÍMITE DE UNA SUCESIÓN) Si (s_n) es una sucesión que converge a ℓ , entonces ℓ se llama *límite* de la sucesión, lo cual se anotará:

$$\ell = \lim s_n \quad \text{o bien} \quad \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \quad \text{o bien} \quad \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

DEFINICIÓN (DEFINICIÓN DE SUCESIÓN NULA) (s_n) se llamará sucesión nula si $s_n \rightarrow 0$.

DEFINICIÓN (SUCESIÓN ACOTADA) (s_n) se llamará sucesión acotada si

$$(\exists M > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) |s_n| \leq M.$$

Teorema 9.2. Sean $(u_n), (v_n)$ sucesiones. Las siguientes proposiciones son ciertas

- (u_n) es nula si y sólo si $(|u_n|)$ es nula.
- Si (u_n) es una sucesión nula entonces (u_n) es una sucesión acotada.
- Si (u_n) es una sucesión nula y $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |v_n| \leq u_n$ entonces (v_n) es una sucesión nula.
- Si (u_n) y (v_n) son sucesiones nulas entonces $(u_n + v_n)$ y $(u_n \cdot v_n)$ son sucesiones nulas.
- Si (u_n) y (v_n) son sucesiones acotadas entonces $(u_n + v_n)$ y $(u_n \cdot v_n)$ son sucesiones acotadas.
- Si (u_n) es una sucesión nula y (v_n) es una sucesión acotada entonces $(u_n \cdot v_n)$ es una sucesión nula. Un caso particular de esto es cuando $v_n = c$ constante.

W/LA • ACOTADA = NULA

$$\frac{1}{n} \sin(n!(e^n)) \Rightarrow 0$$

Proposición 9.1. Sea (s_n) una sucesión de números reales entonces $s_n \rightarrow \ell \iff (s_n - \ell)$ es una sucesión nula.

Proposición 9.2. Sea (s_n) una sucesión de números reales. Si (s_n) es convergente entonces (s_n) es acotada.

Proposición 9.3 (Álgebra de límites). Sean (u_n) y (v_n) dos sucesiones convergentes a u y v , respectivamente. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces las sucesiones $(u_n + v_n)$, $(u_n - v_n)$, $(u_n \cdot v_n)$ y (λu_n) son también convergentes a $u + v$, $u - v$, $u \cdot v$ y λu , respectivamente.

Es decir, si $u_n \rightarrow u$ y $v_n \rightarrow v$ entonces:

- $\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n$
- $\lim(u_n - v_n) = \lim u_n - \lim v_n$
- $\lim(u_n \cdot v_n) = \lim u_n \cdot \lim v_n$
- $\lim(\lambda u_n) = \lambda \lim u_n$

$$\begin{aligned} \lim(n - n) &= \lim(0) = 0 \\ \lim n - \lim n &= \infty - \infty \end{aligned}$$

MALO MALO

Proposición 9.4. Si (s_n) es una sucesión nula entonces la sucesión $(\frac{1}{s_n})$, de estar bien definida, es no acotada y en consecuencia no es convergente.

Proposición 9.6. Sea (s_n) una sucesión real. Si (s_n) converge a $\ell \neq 0$ entonces:

- $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)$ tal que s_n tiene el mismo signo de ℓ (es decir $s_n \cdot \ell > 0$).
- La sucesión $(\frac{1}{s_n})$ es acotada.

Proposición 9.7. Sean (u_n) y (v_n) dos sucesiones convergentes a u y v respectivamente. Si $v \neq 0$, la sucesión (u_n/v_n) es convergente a (u/v) .

Es decir

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}.$$

- $s_n = a$, para $a \in \mathbb{R}$, satisface $\lim s_n = a$.
- $\lim \frac{1}{n} = 0$.
- $\lim \frac{1}{n^k} = 0$, para $k \in \mathbb{N}$.
- $s_n = n^k$, para $k \in \mathbb{N}$, no es acotada luego diverge.

$$s_n = \frac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \dots + b_1 n + b_0},$$

para $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

- si $p < q$, entonces $s_n \rightarrow 0$
- si $p = q$, entonces $s_n \rightarrow \frac{a_p}{b_q}$
- si $p > q$, entonces $(\frac{1}{s_n}) \rightarrow 0$. Entonces (s_n) no es acotada luego diverge.

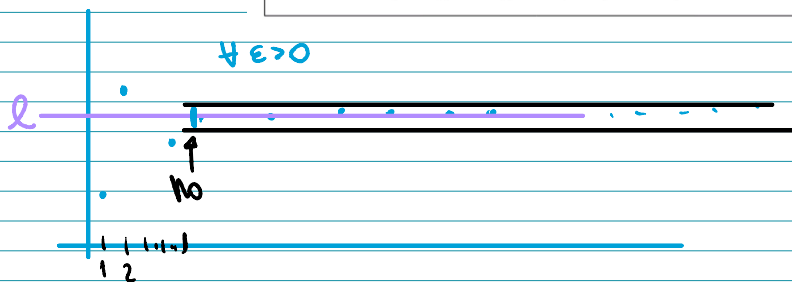
- $\lim \frac{a!}{n!} = 0$.
- $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$, para $a \in \mathbb{R}$.

$$\frac{1}{100} \sim 0,001 \quad \frac{7}{8} \sim 0,875 \quad \frac{100}{1} \sim 100$$

RESUMEN

DEFINICIÓN (CONVERGENCIA) Diremos que la sucesión (s_n) converge a ℓ o bien que los términos s_n tienden a ℓ (lo cual anotaremos $s_n \rightarrow \ell$) si se cumple que:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) s_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon].$$



PI

Dadas las siguientes sucesiones:

- $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donde $s_n = \frac{n^2}{2n^2+1}$
- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donde $a_n = \sqrt{1 + \frac{b}{n}}$, $b \in \mathbb{N}$, $b > 0$

- Determine para cada una, por definición, su límite. (ℓ_s y ℓ_a respectivamente)
- Para $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ encuentre un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N}, |s_n - \ell_s| \leq 0,0002$
- Para $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ encuentre un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N}, |a_n - \ell_a| \leq \frac{1}{1001}$

Hint: Considere que $\frac{\sqrt{5000}}{2} \in (35, 36) \subseteq \mathbb{R}$:

a)

$$s_n = \frac{n^2}{2n^2+1} = \frac{1n^2}{2n^2+1} \Rightarrow \lim_n s_n = \frac{1}{2}$$

PDQ $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, |s_n - \frac{1}{2}| \leq \varepsilon$

Que HACER ???

imponer $\leq \varepsilon$ y BUSCAR el n_0

sea $\varepsilon > 0$

$$|s_n - \frac{1}{2}| = \left| \frac{n^2}{2n^2+1} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2n^2}{2(2n^2+1)} - \frac{1(2n^2+1)}{2(2n^2+1)} \right|$$

$$= \left| \frac{2n^2 - 2n^2 - 1}{2(2n^2+1)} \right| = \left| \frac{-1}{2(2n^2+1)} \right| = \frac{1}{2(2n^2+1)}$$

$$\frac{1}{4n^2+2} \leq \frac{1}{4n^2} \leq \varepsilon$$

Queremos siempre

$$\frac{\varepsilon}{n^x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4n^2} \leq \varepsilon$$

$$\frac{1}{4\varepsilon} \leq n^2$$

$$\frac{1}{4n^2+2} \leq \frac{1}{4n^2}$$

FORMA 1

P.A.

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{4\varepsilon}} \leq n$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \leq n$$

$$\frac{1}{n} \leq 2\sqrt{\varepsilon}$$

PA: $\forall \varepsilon' > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \frac{1}{n} \leq \varepsilon'$

POR PA, TOMANDO $\varepsilon' = 2\sqrt{\varepsilon}$ $\exists$ un n_0 tq

$$\forall n \geq n_0 \quad \frac{1}{n} \leq 2\sqrt{\varepsilon}$$

concluyendo lo pedido
dado que ε era Arbitr.

FORMA 2

$$\lfloor \rfloor + 1$$

$$\frac{1}{n} \leq \sqrt{2}\epsilon \quad (\Rightarrow) \quad \frac{1}{2\sqrt{\epsilon}} \leq n$$

luego BASTA tomar $n_0 = \left\lceil \frac{1}{2\sqrt{\epsilon}} \right\rceil + 1$

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0 \dots$$

Entonces no tq $\forall n \geq n_0 \quad |S_n - \frac{1}{2}| \leq 0,0002$

$$|S_n - \frac{1}{2}| \leq \epsilon$$

$$\Rightarrow \epsilon = 0,0002$$

POR FORMA 2, PARA ϵ ° DADO BASTA TOMAR

$$n_0 = \left\lceil \frac{1}{2\sqrt{\epsilon}} \right\rceil + 1$$

$$\left\lceil \frac{1}{2\sqrt{0,0002}} \right\rceil + 1$$

$$5000 = \frac{1}{0,0002}$$

$$\frac{\sqrt{5000}}{2} \in (35, 36)$$

$$n_0 = \left\lceil \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{5000}}} \right\rceil + 1 \rightarrow \left\lceil \frac{\sqrt{5000}}{2} \right\rceil + 1$$

$$\left\lceil \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{5000}}} \right\rceil + 1$$

$$35 + 1$$

$$\left\lceil \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5000}}} \right\rceil + 1$$

$$36 = n_0$$

P1)

$$a_n = \sqrt{1 + \frac{b}{n}} \quad b > 0$$

$$a_n \rightarrow \sqrt{1+0} = 1$$

PDQ $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \mid |a_n - 1| \leq \varepsilon$

IMPONEMOS $\leq \varepsilon$ y BUSCAMOS n_0

SEA $\varepsilon > 0$

$$|a_n - 1| = \left| \sqrt{1 + \frac{b}{n}} - 1 \right| =$$

SIEMPRE QUE SALGA $\sqrt{\text{ALGO}}$ + OTRACOSA
BUSQUEN DIF de CUADRADOS

$$\left| \frac{(\sqrt{1 + \frac{b}{n}} - 1)(\sqrt{1 + \frac{b}{n}} + 1)}{(\sqrt{1 + \frac{b}{n}} + 1)} \right| = \left| \frac{\sqrt{1 + \frac{b}{n}}^2 - 1^2}{\sqrt{1 + \frac{b}{n}} + 1} \right|$$

$$= \left| \frac{1 + \frac{b}{n} - 1}{\sqrt{1 + \frac{b}{n}} + 1} \right| = \frac{\left| \frac{b}{n} \right|}{\sqrt{1 + \frac{b}{n}} + 1} = \frac{\frac{b}{n}}{\sqrt{1 + \frac{b}{n}} + 1} \leq \frac{\frac{b}{n}}{2} = \frac{b}{2n} \leq \varepsilon$$

NOTAR que $2 \leq \sqrt{1 + \frac{b}{n}} + 1$

$$2 = \sqrt{1} + 1 = \sqrt{1 + 0} + 1 \leq \sqrt{1 + \frac{b}{n}} + 1$$

$$|S_n - 1| \leq \varepsilon$$

$$|S_n - 1| \leq \frac{b}{2n} \leq \varepsilon$$

$$|S_n - 1| \leq \varepsilon$$

$$\frac{b}{2n} \leq \varepsilon //$$

PA

$$\lfloor \quad \rfloor + 1$$

$$\frac{1}{n} \leq \frac{2\varepsilon}{b}$$

$$\frac{b}{2\varepsilon} \leq n$$

$$\Rightarrow \text{como } \varepsilon, b > 0, \frac{\varepsilon}{b} > 0$$

BASTA TOMAR

$$\Rightarrow \text{POR P.A. } \exists n_0, \forall n \geq n_0 \dots$$

$$n_0 = \left\lfloor \frac{b}{2\varepsilon} \right\rfloor + 1$$

$$\underbrace{\text{TOmando } \varepsilon' = \frac{2\varepsilon}{b}}$$

$$\text{Existe entre un } n_0 \text{ tq } \forall n \geq n_0 \quad |a_n - 1| \leq \frac{1}{1001}$$

$$\text{POR FORMA 2 BASTA TOMAR } \left\lceil \frac{\frac{b}{1}}{\frac{2}{1001}} \right\rceil + 1$$

PROP sea $b=3$, calcule...

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n!) + 2n^2}{3n^2 + 4}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - \sqrt{1 + \frac{3}{n}})$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(-1)^n}{5 - (n-2)^3}$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+5} - \sqrt{n+1})\sqrt{n+2}$$

CONCLUSIONES

del AUX 1) BUSCAR ^{deg} de CUADRADO

2) ACOTAR POR el denominador

3) ^{multiplcary} dividir por el de MAYOR GRADO

$$a) \frac{\sin(n!) + 2n^2}{3n^2 + 4}$$

$$\frac{\frac{1}{n^2} (\sin(n!) + 2n^2)}{\frac{1}{n^2} (3n^2 + 4)}$$

$$\frac{\cancel{\frac{1}{n^2}} \sin(n!) + \cancel{2}^2}{\cancel{3}^3 + \frac{\cancel{4}}{\cancel{n^2}}^0}$$

$\Rightarrow$ como $\frac{1}{n^2} \sin(n!) \rightarrow 0$ (NyA)

2 $\rightarrow$ 2, 3 $\rightarrow$ 3 POR cte

$4 \cdot \frac{1}{n^2} \rightarrow 0$ NyA

$$\Rightarrow \lim_n \frac{\sin(n!) + 2n^2}{3n^2 + 4} = \frac{0 + 2}{3 + 0} = \frac{2}{3}$$

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n!) + 2n^2}{3n^2 + 4}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - \sqrt{1 + \frac{3}{n}})$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(-1)^n}{5 - (n-2)^3}$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+5} - \sqrt{n+1})\sqrt{n+2}$$

CONCLUSIONES

del AUX 1) BUSCAR dif de CUADRADO

2) ACOTAR POR el denominador

3) Multiplicar y dividir por el de mayor GRADO

NO USAR si CALCULAMOS límites EXACTOS

SOLO PARA lim por def

$$n(1 - \sqrt{1 + \frac{3}{n}})$$

$$\frac{n(1 - \sqrt{1 + \frac{3}{n}})(1 + \sqrt{1 + \frac{3}{n}})}{1 + \sqrt{1 + \frac{3}{n}}}$$

$$\frac{n(1 - (1 + \frac{3}{n}))}{1 + \sqrt{1 + \frac{3}{n}}} = \frac{n(1 - 1 - \frac{3}{n})}{1 + \sqrt{1 + \frac{3}{n}}}$$

$$\frac{-3}{1 + \sqrt{1 + \frac{3}{n}}}$$

COMO $\sqrt{1 + \frac{3}{n}} \rightarrow 1$ Pl uso $b=3$
 $1 \rightarrow 1$ y $-3 \rightarrow -3$

$$\rightarrow \frac{-3}{1+1} = \frac{-3}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - \sqrt{1 + \frac{3}{n}}) = \frac{-3}{2}$$

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n!) + 2n^2}{3n^2 + 4}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - \sqrt{1 + \frac{3}{n}})$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(-1)^n}{5 - (n-2)^3}$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+5} - \sqrt{n+1})\sqrt{n+2}$$

CONCLUSIONES

del AUX 1) BUSCAR deg de WADRADO

2) ACOTAR POR el denominador

3) ^{multiplicar y} dividir por el de mayor GRADO

$$\frac{n^2(-1)^n}{5 - (n-2)^3}$$

$$|(-1)^n| \leq 1$$

↳ ACOT
↳ NYA

$$\textcircled{3} \frac{\frac{1}{n^3}(n^2(-1)^n)}{\frac{1}{n^3}(5 - (n-2)^3)}$$

$$\frac{\frac{1}{n}(-1)^n}{\frac{5}{n^3} - \left(\frac{1}{n}\right)^3(n-2)^3}$$

$$\frac{\frac{1}{n}(-1)^n}{\frac{5}{n^3} - \left(1 - \frac{2}{n}\right)^3}$$

$$\underbrace{c^n \cdot d^n}_{\substack{c \cdot c \dots c \quad d \cdot d \dots d \\ \text{n veces} \quad \text{n veces}}} = cd^n$$

$$\underbrace{cd \quad cd \dots cd}_{\text{n veces}} = (cd)^n$$

Weyo como $\frac{1}{n}(-1)^n \rightarrow 0$ por NYA,

$\frac{5}{n^3} \rightarrow 0$ por NYA

$$\left(1 - \frac{2}{n}\right)^3 \overset{1}{=} 1 - 3\frac{2}{n} + 3\frac{2^2}{n^2} - \frac{8}{n^3} \overset{0 \text{ NYA}}{\quad} \overset{0 \text{ NYA}}{\quad} \overset{0 \text{ NYA}}{\quad}$$

$$\frac{\frac{1}{n}(-1)^n}{\frac{5}{n^3} - \left(1 - \frac{2}{n}\right)^3} \neq \frac{0}{1} = 0$$

$$\frac{n^2(-1)^n}{5 - (n-2)^3} \rightarrow 0.$$

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n!) + 2n^2}{3n^2 + 4}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - \sqrt{1 + \frac{3}{n}})$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(-1)^n}{5 - (n-2)^3}$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+5} - \sqrt{n+1})\sqrt{n+2}$$

CONCLUSIONES

del AUX 1) BUSCAR dif de CUADRADO

2) ACOTAR POR el denominador

3) ^{multiplicar y} dividir por el de mayor GRADO

$$= (\sqrt{n+5} - \sqrt{n+1})\sqrt{n+2}$$

$$= \frac{(\sqrt{n+5} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n+5} + \sqrt{n+1})\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n+1}}$$

$$\sqrt{n+5} + \sqrt{n+1}$$

$$= \frac{(n+5 - (n+1))\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n+1}}$$

$$\sqrt{n+5} + \sqrt{n+1}$$

$$= \frac{4\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{1}{n}}(4\sqrt{n+2})}{\sqrt{\frac{1}{n}}(\sqrt{n+5} + \sqrt{n+1})}$$

$$4\sqrt{\frac{n}{n} + \frac{2}{n}}$$

$$\sqrt{\frac{n}{n} + \frac{5}{n}} + \sqrt{\frac{n}{n} + \frac{1}{n}}$$

$$= \frac{4\sqrt{1 + \frac{2}{n}}}{\sqrt{1 + \frac{5}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}$$

$$\sqrt{1 + \frac{5}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$$

$$\rightarrow \frac{4 \cdot 1}{1 + 1} = 2$$

CONCLUSIONES

del AUX 1) BUSCAR dif de CUADRA

2) ACOTAR P el denomin

3) ^{multiplicar y} dividir por el de mayor GRADO

POR definición

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, |S_n - 2| \leq \epsilon$$

imponemos $\leq \epsilon$ y BUSGAMOS n_0
SEA $\epsilon > 0$

$$|(\sqrt{n+5} - \sqrt{n+1})\sqrt{n+2} - 2|$$

$$\left| \frac{\sqrt{n+5} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n+1}} \left((\sqrt{n+5} - \sqrt{n+1})\sqrt{n+2} - 2 \right) \right|$$

$$\left| \frac{4\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+5} - 2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n+1}} \right|$$

$$\left| \frac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} \left(\frac{4\sqrt{1+\frac{2}{n}} - 2\sqrt{1+\frac{5}{n}} - 2\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{5}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n}}} \right) \right|$$

CONCLUSIONES
del AUX

- 1) buscar de de cuadrado
- 2) acomode por el de no más
- 3) dividir por el de mayor grado

por def $\rightarrow$

$$\left| \frac{4\sqrt{1+\frac{2}{n}} - 2\sqrt{1+\frac{5}{n}} - 2\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{5}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n}}} \right| = \textcircled{\star}$$

NOTAR que $\sqrt{1+\frac{5}{n}} \geq 1$

$$\sqrt{1+\frac{1}{n}} \geq 1$$

luego $1 \leq 2 = 1+1 \leq \sqrt{1+\frac{5}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n}}$

$$\textcircled{\star} \leq \frac{|4\sqrt{1+\frac{2}{n}} - 2\sqrt{1+\frac{5}{n}} - 2\sqrt{1+\frac{1}{n}}|}{1}$$

$$= |4\sqrt{1+\frac{2}{n}} - 2\sqrt{1+\frac{5}{n}} - 2\sqrt{1+\frac{1}{n}}|$$

$$\left| 4\sqrt{1+\frac{2}{n}} - 2\sqrt{1+\frac{5}{n}} - 2\sqrt{1+\frac{1}{n}} \right|$$

$$\left| 4\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}-1\right) + \cancel{4} - 2\left(\sqrt{1+\frac{5}{n}}-1\right) - \cancel{2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right) - \cancel{2} \right|$$

$$|7 - 8| \leq |7| + |8|$$

$$|7 + (-8)| \leq |7| + |-8| = |7| + |8|$$

COMO $\sqrt{1+\frac{2}{n}} \rightarrow 1$ ARMEAMOS este límite

$$\left| 4\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}-1\right) - 2\left(\sqrt{1+\frac{5}{n}}-1\right) - 2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right) \right|$$

$$\leq \left| 4\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}-1\right) \right| + \left| 2\left(\sqrt{1+\frac{5}{n}}-1\right) \right| + \left| 2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right) \right|$$

COMO $\sqrt{1+\frac{2}{n}} \rightarrow 1$, $\exists n_1$ tq

$$\forall n \geq n_1 \quad \left| \sqrt{1+\frac{2}{n}} - 1 \right| \leq \frac{\epsilon}{8}$$

$$\forall n \geq n_2 \quad \left| \sqrt{1+\frac{5}{n}} - 1 \right| \leq \frac{\epsilon}{8} \quad \leftarrow \text{ANÁLOGAMENTE}$$

$$\forall n \geq n_3 \quad \left| \sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1 \right| \leq \frac{\epsilon}{8}$$

$$\leq |4(\sqrt{1+\frac{2}{n}}-1)| + |2(\sqrt{1+\frac{s}{n}}-1)| + |2(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1)|$$

como $\sqrt{1+\frac{2}{n}} \rightarrow 1$, $\exists n_1$ tq

$$\forall n \geq n_1 \quad |\sqrt{1+\frac{2}{n}}-1| \leq \frac{\varepsilon}{8}$$

$$\forall n \geq n_2 \quad |\sqrt{1+\frac{s}{n}}-1| \leq \frac{\varepsilon}{8} \quad \leftarrow \text{Arbitrariamente}$$

$$\forall n \geq n_3 \quad |\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1| \leq \frac{\varepsilon}{8}$$

luego para $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$

$\forall n \geq n_0$

$$|4(\sqrt{1+\frac{2}{n}}-1)| + |2(\sqrt{1+\frac{s}{n}}-1)| + |2(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1)|$$

$$\leq 4 \frac{\varepsilon}{8} + 2 \frac{\varepsilon}{8} + 2 \frac{\varepsilon}{8}$$

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

luego como $\varepsilon > 0$ era
arbitrario, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0^{\max\{n_1, n_2, n_3\}} \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$
 $n \geq n_0$, $|S_n - 2| \leq \varepsilon$

Sean $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ dos sucesiones donde $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$. Demuestre que si $(a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$, entonces $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \ell$.

$$a_n \rightarrow \ell$$

$$\text{PDQ } (a_n - b_n) \rightarrow 0 \Rightarrow b_n \rightarrow \ell$$

$$a_n \rightarrow \ell$$

y

$$a_n - b_n \rightarrow 0$$

$$\text{PDQ } b_n \rightarrow \ell$$

VAMOS POR DEFINICIÓN

$$a_n - b_n \rightarrow 0$$

Sea $\varepsilon > 0$

$$|x| = |-x| = |x|$$

$$\begin{aligned} |b_n - \ell| &= |b_n - a_n + a_n - \ell| \\ &\leq |b_n - a_n| + |a_n - \ell| \\ &= |a_n - b_n| + |a_n - \ell| \end{aligned}$$

$$|b_n - a_n| = |- (a_n - b_n)| = |a_n - b_n|$$

$$\text{Como } a_n \rightarrow \ell \quad \exists n_1 \text{ tq } \forall n \geq n_1 \quad |a_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Como } a_n - b_n \rightarrow 0 \quad \exists n_2 \text{ tq } \forall n \geq n_2 \quad |a_n - b_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

luego definiendo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

$$\forall n \geq n_0 \quad |b_n - \ell| \leq |a_n - b_n| + |a_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\Rightarrow$ POR def, como $\varepsilon > 0$ era arbitrario $b_n \rightarrow \ell$

importante

técnica de los n - ϵ

acotar por el denominador

buscar suma por su dif

multiplicar y dividir por el de ϵ