Auxiliar 5: Funciones

Profesor: Matias Pavez Signe
Auxiliares: Gisela Abarca Andereya,
Ignacio Dagach Abugattas

P1. Para comenzar

Determine, según corresponda, asíntotas verticales, horizontales y dominio de la siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{-x^2+3x-2}{x^2-1}$

b) $g(x) = \frac{6x^2+18x-60}{x^2-6x+8}$

P2. Matraca

Considere la funcion f dada por $f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$ y determine:

a) Dominio, Imagen, ceros y signos

b) Inyectividad de f

c) ¿Existe $f^{-1} : \mathrm{Im}(f) \to \mathrm{Dom}(f)$? Si es así entregue una formulación explícita de la misma

d) Crecimiento de f en el intervalo $(-\infty, -1/2)$

P3. De controles

Considere la funcion f dada por $f(x) = |x| - \sqrt{1-|x|}$ y determine:

a) Dominio, paridad, ceros y signos

b) Crecimiento de f

c) Imagen de f

d) Inversa de $f\Big|_{\mathrm{Dom}(f)\cap(-\infty,0)}$

Resumen Auxiliar 5

Introducción al Cálculo - MA1001-9 - Otoño 2024

Gisela Abarca Andereya & Ignacio Dagach Abugattas ♡♡

Definición (Ceros de una función) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Llamaremos *ceros de* f a todos los reales de su dominio tales que $f(x) = 0$. En estos puntos el gráfico de f corta al eje OX.

Definición (Conjunto Imagen) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Llamaremosonjunto Imagen de f al conjunto definido por

$$\text{Im } (f) = f(A) = \{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in A) \text{ de modo que } y = f(x)\}.$$

O sea

$$\text{Im } (f) = \{f(x) : x \in A\}.$$

Definición (Función par) Diremos que $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una *función par* ssi

- $(\forall x \in A)\ -x \in A$.
- $(\forall x \in A)\ f(-x) = f(x)$.

Definición (Función impar) Diremos que $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una *función impar* ssi

- $(\forall x \in A)\ -x \in A$.
- $(\forall x \in A)\ f(-x) = -f(x)$.

Definición (Asíntotas Verticales) Sea

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}.$$

Si $x_1, x_2, \cdots x_r$ son todas las raíces del Denominador, es decir de la función $Q(x)$ pero no del Numerador, o sea de la función $P(x)$, entonces las rectas $x = x_1$, $x = x_2, \ldots, x = x_r$ se llaman **Asíntotas verticales** de la función $f(x)$ y se caracterizan por que para valores de x cercanos a dichos puntos la función crece o decrece sin cotas.

Definición (Asíntota Horizontal) Sea

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}.$$

Si $n = m$ la recta $y = \frac{a_m}{b_m}$ se llama **asíntota horizontal** de la función f y se caracteriza por que para valores de x muy grandes o muy negativos los valores de $f(x)$ se aproximan a dicha recta.

Si $n < m$ la asíntota horizontal es $y = 0$.

- Diremos que f es **inyectiva** ssi $[f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2]$, o equivalentemente $[x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)]$
- Diremos que f es **epiyectiva** ssi $\text{Im } (f) = \text{Cod } (f)$

Definición (Función inversa) Sea $f : \text{Dom}(f) \to \text{Cod } (f)$ una función biyectiva. se define la función inversa de f como la función f^{-1} definida por:

$$f^{-1} : \text{Cod } (f) \to \text{Dom}(f) \text{ tal que } [y = f^{-1}(x) \iff x = f(y)].$$

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función cualquiera no invertible.

- Se determina $B \subseteq A$ tal que $f|_B$ sea inyectiva.
- De igual modo se restringe el codominio $\mathbb{R}$ a $\text{Im } (f|_B)$. Con esto $f|_B$ se hace biyectiva y luego invertible.