PAUTA AUXILIAR 3
INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO
OTOÑO 24, SECCIÓN 9.
Ygnacio Dayach Abuyattas

a) Sea $A=(\alpha,0)$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\alpha > 0$, encuentre el lugar geométrico C_0 de los puntos P del plano tales que su distancia a A sea el doble de su distancia al origen. Defina como L_0 la recta que pasa por el "polo norte" de C_0 y el origen, y entregue la ecuación de la recta L que pasa por el "polo norte" de C_0 y es perpendicular a L_0.

P1. a)

$A=(a,0)=(\alpha,0)$
*solo notación

P.2

SEA $P=(x,y)$

$d(P,A) = 2d(P,O) \Leftrightarrow d(P,A)^2 = 4d(P,O)^2$

$d(P,A)^2 = (x-a)^2+(y-0)^2$
$= x^2-2ax+a^2+y^2$

$4d(P,O)^2 = 4[(x-0)^2+(y-0)^2]$
$= 4(x^2+y^2)$ (1pt)

LUEGO,

$d(P,A)^2 = 4d(P,O)^2 \Leftrightarrow x^2-2ax+a^2+y^2 = 4x^2+4y^2$
$\Leftrightarrow 3x^2+3y^2+2ax = a^2$
$\Leftrightarrow x^2+y^2+\frac{2}{3}ax = \frac{a^2}{3}$
$\Leftrightarrow \left(x+\frac{a}{3}\right)^2+y^2 = \frac{a^2}{3}+\frac{a^2}{9}$ (2pts)
$\Leftrightarrow \left(x+\frac{a}{3}\right)^2+y^2 = \frac{4}{9}a^2$

$\Leftrightarrow \left(x-\left(-\frac{a}{3}\right)\right)^2+y^2 = \left(\frac{2}{3}a\right)^2$ (2 pts)

NOTA: SI ESCRIBEN LA DISTANCIA CON LA RAÍZ CUADRADA, ENTONCES SON 5 PTS HASTA ACÁ.

LUEGO, EL LUGAR GEOMÉTRICO ES UNA CIRCUNFERENCIA CON CENTRO $\left(-\frac{a}{3},0\right)$ Y RADIO $\frac{2}{3}a$.

$\Rightarrow$

$L_0: y = mx+n$

donde

$m = \dfrac{\frac{2}{3}a}{-\frac{1}{3}a} = -2$

y $n=0$

pues la recta pasa por el $(0,0)$ y el $\left(-\frac{a}{3}, \frac{2}{3}a\right)$

Polo Norte.

(identifique el pq de cada resultado)

$\Rightarrow L: y = m'x+n'$

donde $m\cdot m' = -1$
$-2\cdot m' = -1$
$\Rightarrow m' = \frac{1}{2}$

pq??

$\Rightarrow$
$L: y = \frac{1}{2}x+n'$

Pero $\left(-\frac{a}{3}, \frac{2}{3}a\right) \in L$

$\Rightarrow$

$\frac{2}{3}a = \frac{1}{2}\left(\frac{-a}{3}\right)+n'$

$\Rightarrow$

$n' = \frac{5a}{6}$.

P1.b.

b) Entregue la ecuación de la circunferencia C_1 cuyo radio es el mismo que el de $x^2+x+y^2 = 3y$, considerando que el *"polo sur"* de C_1 pasa por el punto (a, b).

Solución: **Parte 1:** Obtención el radio vía completación de cuadrados perfectos:
Claramente

$$\begin{aligned} x^2+x+y^2=3y &\iff x^2+x+y^2-3y=0 \\ &\iff x^2+2(\tfrac{1}{2})x+(\tfrac{1}{2})^2+y^2-2(\tfrac{3}{2})y+(\tfrac{3}{2})^2=\frac{1}{4}+\frac{9}{4} \\ &\iff \left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\tfrac{3}{2}\right)^2=\frac{10}{4} \end{aligned}$$

Luego el radio vale $R=\frac{\sqrt{10}}{2}$

Luego, si C_1 pasa por (a,b)
en su polo sur
el centro de C_1 debe
estar verticalmente
hacia arriba de (a,b)
en (R = radio de C_1) unidades,
y horizontalmente en
la misma posición que (a,b)
$\Rightarrow$

$$C_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ;\ (x-a)^2+(y-(b+R))^2=R^2\}$$

donde $R=\sqrt{10}/2$

P2

P2. Matraca

Encuentre la ecuación de la circunferencia inscrita en el triangulo definido por la intersección de las siguientes rectas:

$$L_1 : 2x - 3y + 21 = 0$$
$$L_2 : 3x - 2y - 6 = 0$$
$$L_3 : 2x + 3y - 9 = 0$$

Para esto:

a) Deteremine los vértices del triangulo y haga un dibujo

b) Determine las bisectrices del triangulo

c) Encuentre el centro y radio de la circunferencia y concluya.

Hint 1: Una circunferencia inscrita en un triangulo tiene como centro la intersección de las bisectrices.
Hint 2: Recuerde que la formula de la distacia d entre una recta $ax + by + c = 0$ y un punto (x_0, y_0) es $d = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

P2.a

a) Para determinar los vértices debemos intersectar cada par de rectas.

$V_1 = L_1 \cap L_2$: $6x - 9y + 63 = 6x - 4y - 12$
$\iff 5y = 75$
$\iff y = 15$
$\rightarrow 3x - 30 - 6 = 0 \iff 3x = 36 \iff x = 12$

$\Longrightarrow \boxed{V_1 = (12, 15)}$

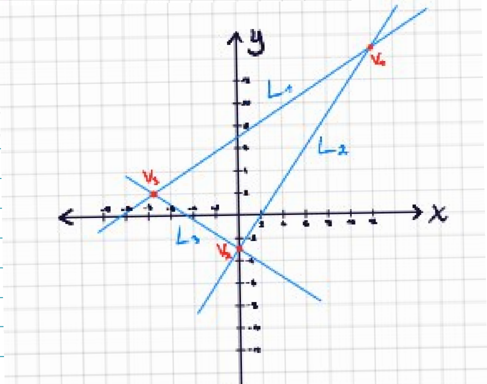
$V_2 = L_2 \cap L_3$: $6x - 4y - 12 = 6x + 9y + 27$
$\iff 13y = -39$
$\iff y = -3$
$\rightarrow 3x + 6 - 6 = 0 \iff 3x = 0 \iff x = 0$

$\Longrightarrow \boxed{V_2 = (0, -3)}$

$V_3 = L_1 \cap L_3$: $2x - 3y + 21 = 2x + 3y + 9$
$\iff 6y = 12$
$\iff y = 2$
$\rightarrow 2x + 6 + 9 = 0 \iff 2x = -15 \iff x = -15/2$

$\Longrightarrow \boxed{V_3 = (-15/2, 2)}$

Ahora podemos hacer el dibujo.



P2. Matraca

Encuentre la ecuación de la circunferencia inscrita en el triangulo definido por la intersección de las siguientes rectas:

$$L_1 : 2x - 3y + 21 = 0$$
$$L_2 : 3x - 2y - 6 = 0$$
$$L_3 : 2x + 3y - 9 = 0$$

Para esto:

a) Deteremine los vértices del triangulo y haga un dibujo

b) Determine las bisectrices del triangulo

c) Encuentre el centro y radio de la circunferencia y concluya.

Hint 1: Una circunferencia inscrita en un triangulo tiene como centro la intersección de las bisectrices.
Hint 2: Recuerde que la formula de la distacia d entre una recta $ax + by + c = 0$ y un punto (x_0, y_0) es $d = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

P2.b)

b) Las bisectrices de un triángulo son aquellas rectas que dividen un ángulo en dos partes iguales, por lo tanto los puntos de una bisectriz estarán a la misma distancia de las dos rectas que la definen.

$\longrightarrow$ 0.5 pts.

El argumento inicial DEBE estar (basta que digan desde el "por lo tanto".

Entonces usando la fórmula de la distancia punto-recta, tenemos:

$$B_1: \frac{|2x-3y+21|}{\sqrt{13}} = \frac{|3x-2y-6|}{\sqrt{13}}$$

$$\Leftrightarrow [2x-3y+21 = 3x-2y-6] \vee [2x-3y+21 = -3x+2y+6]$$

$$\Leftrightarrow [x+y-27=0] \vee [x-y+3=0]$$

$\longrightarrow$ Notar que la recta $x+y=27$ pasa por fuera del triángulo, ya que cuando $x=0$, $y=27>7=\max\{y:(0,y)\in\Delta\}$
Por lo tanto, la recta que buscamos es

$$\boxed{B_1: \ x-y+3=0}$$

$$B_2: \frac{|3x-2y-6|}{\sqrt{13}} = \frac{|2x+3y+9|}{\sqrt{13}}$$

$$\Leftrightarrow [3x-2y-6 = 2x+3y+9] \vee [3x-2y-6 = -2x-3y-9]$$

$$\Leftrightarrow [x-5y-15=0] \vee [5x+y+3=0]$$

$\longrightarrow$ Notar que la recta $x-5y-15=0$ pasa por fuera del triángulo, ya que cuando $y=0$, $x=15>2=\max\{x:(x,0)\in\Delta\}$
Por lo tanto, la recta que buscamos es

$$\boxed{B_2: \ 5x+y+3=0}$$

$$B_1: \frac{|2x-3y+21|}{\sqrt{13}} = \frac{|2x+3y+9|}{\sqrt{13}}$$

$$\Leftrightarrow [2x-3y+21 = 2x+3y+9] \vee [2x-3y+21 = -2x-3y-9]$$

$$\Leftrightarrow [y-2=0] \vee [2x+15=0]$$

$\longrightarrow$ Notar que la recta $2x+15=0$ pasa por fuera del triángulo, ya que $x=-15/2=\min\{x:(x,y)\in\Delta\}$
Por lo tanto, la recta que buscamos es

$$\boxed{B_3: \ y=2}$$

P2. Matraca

Encuentre la ecuación de la circunferencia inscrita en el triangulo definido por la intersección de las siguientes rectas:

$$L_1 : 2x - 3y + 21 = 0$$
$$L_2 : 3x - 2y - 6 = 0$$
$$L_3 : 2x + 3y - 9 = 0$$

P2.C

Para esto:

a) Deteremine los vértices del triangulo y haga un dibujo

b) Determine las bisectrices del triangulo

c) Encuentre el centro y radio de la circunferencia y concluya.

Hint 1: Una circunferencia inscrita en un triangulo tiene como centro la intersección de las bisectrices.

Hint 2: Recuerde que la formula de la distacia d entre una recta $ax + by + c = 0$ y un punto (x_0, y_0) es $d = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

c) Para encontrar la circunferencia inscrita partiremos por determinar el centro, que se encuentra en la intersección de las bisectrices.

$$C = (h,k) \in B_1 \cap B_2 \iff h - k + 3 = 0 \quad \wedge \quad k - 2 = 0$$
$$\iff h = -1, \quad k = 2$$

Ahora debemos encontrar el radio, que es la distancia del centro a cualquiera de las rectas.

$$R^2 = \frac{(2h - 3k + 21)^2}{13} = \frac{(-2-6+21)^2}{13} = \frac{13^2}{13} = 13$$

Finalmente, tenemos que la circunferencia inscrita en el triángulo tiene ecuación

$$\boxed{(x+1)^2 + (y-2)^2 = 13}$$

, con centro en $\boxed{C = (-1,2)}$ y radio $\boxed{R = \sqrt{13}}$

P3

Considere dos circunferencias C_1 y C_2 La primera está centrada en el origen y tiene radio 1. La segunda está centrada en $(2,1)$ y tiene radio r. Demuestre que si $1+r=\sqrt{5}$, entonces C_1 y C_2 tienen un único punto en común.

¡IDEA :)

PASO 1.

identificar condición para puntos en C_1 y C_2.

esta es: $C_1 = C_2$ (donde obtenemos $L = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 ;\ y = -2x+\sqrt{5}\}$)

y nos dice que si $(x,y)\in C_i \cap L \Rightarrow (x,y)\in C_1\cap C_2$ para $i=1,2$

PASO 2

identificar condición para puntos en L y C_1 y C_2

esto es:

reemplazar en C_1, o C_2, las coordenadas y por las de L

se puede reemplazar en C_1 o C_2 indistintamente pues si $(x,y)\in C_1\cap L \Rightarrow (x,y)\in C_1\cap C_2$ y analogamente si $(x,y)\in C_2\cap L \Rightarrow (x,y)\in C_1\cap C_2$ por def. de L

PASO 3

(a) (**3 puntos**) Considere dos circunferencias C_1 y C_2. La primera está centrada en el origen y tiene radio 1. La segunda está centrada en $(2,1)$ y radio r. Pruebe que si $1+r=\sqrt{5}$ entonces C_1 y C_2 tienen un único punto común.

Solución:

Un punto en ambas circunferencias debe cumplir $x^2+y^2=1$ y $(x-2)^2+(y-1)^2=r^2$. Restando estas dos ecuaciones obtenemos que

$$-4x+4-2y+1=r^2-1$$

de lo cual podemos despejar $y=-2x+3-r^2/2$. Dado que $r=\sqrt{5}-1$ luego $r^2=5-2\sqrt{5}+1=2(3-\sqrt{5})$. Así los punto que están en ambas circunferencias tienen que estar en la recta oblicua de ecuación $y=-2x+\sqrt{5}$. $= L$

PASO 1

(**1 punto**)

Notamos de lo anterior que todos los puntos que estén en ambas circunferencias, de tener igual coordenada x son iguales.

Además, reemplazando en la ecuación de C_1 tenemos

$$x^2+(-2x+\sqrt{5})^2=1$$

o equivalentemente

$$5x^2-4\sqrt{5}x+4=0.$$

PASO 2

(**1 punto**)

Esta ecuación tiene solución única si $\Delta=b^2-4ac=0$ con $a=5$, $b=-4\sqrt{5}$ y $c=4$. Y de hecho $\Delta=(-4\sqrt{5})^2-4\cdot 5\cdot 4=0$ de lo cual deducimos que sólo un punto (cuya abscisa x es la solución de la cuadrática y su ordenada de modo que el punto (x,y) esté en la recta $y=-2x+\sqrt{5}$).

PASO 3

(**1 punto**)