

# Auxiliar 3: Geometría Analítica

Profesor: Matias Pavez Signe  
Auxiliares: Gisela Abarca Andereya,  
Ignacio Dagach Abugattas

## P1. Para comenzar

- Sea  $A = (\alpha, 0)$ , donde  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $\alpha > 0$ , encuentre el lugar geométrico  $C_0$  de los puntos  $P$  del plano tales que su distancia a  $A$  sea el doble de su distancia al origen. Defina como  $L_0$  la recta que pasa por el "polo norte" de  $C_0$  y el origen, y entregue la ecuación de la recta  $L$  que pasa por el "polo norte" de  $C_0$  y es perpendicular a  $L_0$ .
- Entregue la ecuación de la circunferencia  $C_1$  cuyo radio es el mismo que el de  $x^2 + x + y^2 = 3y$ , considerando que el "polo sur" de  $C_1$  pasa por el punto  $(a, b)$ .

## P2. Matraca

Encuentre la ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo definido por la intersección de las siguientes rectas:

$$L_1 : 2x - 3y + 21 = 0$$

$$L_2 : 3x - 2y - 6 = 0$$

$$L_3 : 2x + 3y - 9 = 0$$

Para esto:

- Determine los vértices del triángulo y haga un dibujo
- Determine las bisectrices del triángulo
- Encuentre el centro y radio de la circunferencia y concluya.

*Hint 1: Una circunferencia inscrita en un triángulo tiene como centro la intersección de las bisectrices.*

*Hint 2: Recuerde que la fórmula de la distancia  $d$  entre una recta  $ax + by + c = 0$  y un punto  $(x_0, y_0)$  es  $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .*

## P3. De controles

Considere dos circunferencias  $C_1$  y  $C_2$ . La primera está centrada en el origen y tiene radio 1. La segunda está centrada en  $(2, 1)$  y tiene radio  $r$ . Demuestre que si  $1 + r = \sqrt{5}$ , entonces  $C_1$  y  $C_2$  tienen un único punto en común.



DEFINICIÓN (DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS)

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (3.1)$$

DEFINICIÓN (ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA)

$$\mathcal{C} : (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

DEFINICIÓN (ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA)

$$\mathcal{L} : ax + by + c = 0.$$

DEFINICIÓN (PENDIENTE DE UNA RECTA) Sea  $\mathcal{L}$  una recta no vertical. Si  $A = (x_1, y_1)$  y  $B = (x_2, y_2)$  son dos puntos diferentes de  $\mathcal{L}$ , entonces al real  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ , se le llama *pendiente de la recta  $\mathcal{L}$* .

**Teorema 3.1.** *El conjunto solución de la ecuación  $ax + by + c = 0$  es:*

- i) *El conjunto vacío si  $a = 0, b = 0, c \neq 0$ .*
- ii) *Todo el plano  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  si  $a = b = c = 0$ .*
- iii) *Una recta vertical si  $a \neq 0$  y  $b = 0$ .*
- iv) *Una recta horizontal si  $a = 0$  y  $b \neq 0$ .*
- v) *Una recta oblicua (inclinada) si  $a \neq 0$  y  $b \neq 0$ .*

DEFINICIÓN (ECUACIÓN DE LA RECTA DADOS DOS PUNTOS)

$$\mathcal{L} : (y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

DEFINICIÓN (SIMETRAL) Dados dos puntos  $P, Q \in \mathbb{R}^2$  distintos, llamamos Simetral de  $P$  y  $Q$ , a la recta  $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^2$  que satisface

$$(x, y) \in \mathcal{L} \iff d(P, (x, y)) = d(Q, (x, y)).$$

**Proposición 3.2.** *Sean  $L$  y  $L'$  dos rectas. Entonces  $L \perp L'$  si y sólo si una de las siguientes condiciones se satisface.*

- *$L$  es horizontal y  $L'$  es vertical.*
- *$L$  es vertical y  $L'$  es horizontal.*
- *$L$  y  $L'$  son oblicuas con pendientes  $m_L$  y  $m_{L'}$  respectivamente y  $m_L \cdot m_{L'} = -1$ .*