



ramo: Introducción Al Cálculo
Magnacio Dayach Abugattas
Practica AUX 1

fecha: / /
s: c: a:

P1. a) RAZONANDO por contradicción,
dado que la existencia de al menos 1 esta
garantizada por teorema de existencia,
supongamos existe más de 1 elemento
neutro y llegaremos a una contradicción.

P1. a)
Pdq: el INVERSO
aditivo es
único.

(Utilizaremos $n=2$ elem. neutros pues aparece
la contradicción, y en el caso $n>2$ particularmente
hay 2 elem. neutros llegando igualmente a la contradicción)

Sean $e_1, e_2 \in R$ elementos neutros tales que $e_1 \neq e_2$
 $\Rightarrow$ como e_1 y e_2 son elem. neutros

$$\forall x \in R \quad \underbrace{x \cdot e_1 = x}_{(1)} \quad \wedge \quad \forall x \in R, \quad \underbrace{x \cdot e_2 = x}_{(2)}$$

weyo tomando $x = e_2$ en (1)
y $x = e_1$ en (2)
tenemos que:

$$\underbrace{e_2 \cdot e_1 = e_2}_{(1)} \quad \wedge \quad \underbrace{e_1 \cdot e_2 = e_1}_{(2)}$$

con esto, usando Ax de conmutatividad
en (1)

$$\underbrace{e_1 \cdot e_2 = e_2}_{(1)} \quad \wedge \quad \underbrace{e_1 \cdot e_2 = e_1}_{(2)}$$

concluyendo que $e_2 = e_1 \cdot e_2 = e_1 \cdot e_2 = e_1$
con lo que $e_2 = e_1$

obteniendo la contradicción con (*) concluyendo que
no puede haber + de 1 elem. neutro y dado que
tenemos la existencia por teo. se concluye la unicidad

ramo:

P1 b)

b) El inverso multiplicativo es único

siempre que tenga sentido

a:

Bajo el mismo Argumento de la P1.a)

Supongamos existen 2 elementos inversos distintos de algún real $x \neq 0$, sean estos:

$$P_1, P_2 \in \mathbb{R}$$

Como sabemos

$$x \cdot P_1 = 1 \quad (1)$$

$$x \cdot P_2 = 1 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P_1 &= P_1 \cdot 1 \\ &= P_1 \cdot (x \cdot P_2) \\ &= (P_1 \cdot x) \cdot P_2 \\ &= (x \cdot P_1) \cdot P_2 \\ &= 1 \cdot P_2 \\ &= P_2 \end{aligned}$$

AX. elem. neutro

(2)

AX. ASOCIATIVIDAD

AX. conmutativ.

(1)

AX. conmutativ.

AX. elem. neutro

concluyendo que $P_1 = P_2$

y bajo el mismo Argumento

de la P1.a) se concluye

la unicidad del elemento inverso.

ramo:

Demuestre, utilizando exclusivamente los axiomas de cuerpo de los reales y los teoremas de unicidad de neutro e inversos, que:

- a) $\forall x \in \mathbb{R}, x \cdot 0 = 0$
 b) $\forall x \in \mathbb{R}, (-1) \cdot x = -x$
 c) $\forall x \in \mathbb{R}^*, (-x)^{-1} = -(x^{-1})$
 d) $\forall x, y \in \mathbb{R}, xy = 0 \implies x = 0 \vee y = 0$
 e) $\forall a, c \in \mathbb{R}, \forall b, d \in \mathbb{R}^*, a(b+d) = b(a+c) \implies ab^{-1} = cd^{-1}$

P2 a) sea $x \in \mathbb{R}$

veamos que si:

$x + x \cdot 0 = x$ se tiene
 lo pedido pues el neutro
 aditivo es único e igual a 0

$$= x + x \cdot 0$$

$$= x \cdot 1 + x \cdot 0$$

$$= x(1+0)$$

$$= x \cdot 1$$

$$= x$$

Neutro multiplicativo

distributividad

Neutro aditivo

Neutro multiplicativo

como se probó para $x \in \mathbb{R}$ arbitrario
 se concluye.

P2 b) P.D.O $\forall x \in \mathbb{R} \quad (-1) \cdot x = -x$,
 es decir;
 $\forall x \in \mathbb{R} \quad x + (-1) \cdot x = 0$

sea $x \in \mathbb{R}$

$$= x + (-1) \cdot x$$

$$= x \cdot 1 + (-1) \cdot x$$

$$= 1 \cdot x + (-1) \cdot x$$

$$= (1 + (-1)) \cdot x$$

$$= 0 \cdot x$$

$$= 0$$

Neutro multip.

conmutativ

distributividad

inverso aditivo

P2, a)

concluyendo que $(-1) \cdot x = -x$ por unicidad
 del inv. aditivo y dado que x
 era arbitrario

Demuestre, utilizando exclusivamente los axiomas de cuerpo de los reales y los teoremas de unicidad de neutro e inversos, que:

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x \cdot 0 = 0$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, (-1) \cdot x = -x$

c) $\forall x \in \mathbb{R}^*, (-x)^{-1} = -(x^{-1})$

d) $\forall x, y \in \mathbb{R}, xy = 0 \implies x = 0 \vee y = 0$

e) $\forall a, c \in \mathbb{R}, \forall b, d \in \mathbb{R}^*, a(b+d) = b(a+c) \implies ab^{-1} = cb^{-1}$

P2. c) P.D. $\forall x \in \mathbb{R} \quad (-x)^{-1} = -(x^{-1})$

Sea $x \in \mathbb{R}$; queremos que $-x \cdot (-(x^{-1})) = 1$
 para concluir por unicidad del
 inverso multiplicativo y dado que
 x era arbitrario.

$$(-x) \cdot (-(x^{-1}))$$

$$[(-1)(x)][(-1)(x^{-1})]$$

P2. b

$$\{[(-1)(x)](-1)\} \cdot x^{-1}$$

Asociatividad

$$\{(x) \cdot (-1)](-1)\} \cdot x^{-1}$$

comutatividad

$$\{(x)[(-1)(-1)]\} \cdot x^{-1}$$

asociatividad

$$\{(x)[1]\} \cdot x^{-1}$$



$$(x) \cdot x^{-1}$$

elemento neutro
inverso multiplic.

$$1$$

★ P.D. $(-1)(-1) = 1$

en efecto pues $(-1)(-1) = -(-1)$ por P2-b

y $-(-1) = 1$ pues

$$(-1) + 1 = 1 + (-1) = 0$$

por comutatividad
y el inverso
aditivo.

Demuestre, utilizando exclusivamente los axiomas de cuerpo de los reales y los teoremas de unicidad de neutro e inversos, que:

- a) $\forall x \in \mathbb{R}, x \cdot 0 = 0$
- b) $\forall x \in \mathbb{R}, (-1) \cdot x = -x$
- c) $\forall x \in \mathbb{R}^*, (-x)^{-1} = -(x^{-1})$
- d) $\forall x, y \in \mathbb{R}, xy = 0 \implies x = 0 \vee y = 0$
- e) $\forall a, c \in \mathbb{R}, \forall b, d \in \mathbb{R}^*, a(b+d) = b(a+c) \implies ab^{-1} = cd^{-1}$

P2 b) d)

supongamos por contradicción
que, dados $x, y \in \mathbb{R}^*$ cualesquiera,
 $x \cdot y = 0 \wedge x \neq 0 \wedge y \neq 0$;

como $x \cdot y = 0$, $(x \cdot y) \cdot y^{-1} = 0$

Pues $0 \cdot y^{-1} = 0$ (y^{-1} existe pues $y \in \mathbb{R}^*$
y es único)

$\implies (x \cdot y) \cdot y^{-1} = 0$

$x(y \cdot y^{-1}) = 0$

$x(1) = 0$
 $x = 0$

Asociatividad

elemento inverso
neutro multiplicativo.



demostrando lo pedido

P2 e)

$$e) \forall a, c \in \mathbb{R}, \forall b, d \in \mathbb{R}^*, a(b+d) = b(a+c) \implies ab^{-1} = cd^{-1}$$

sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $c, d \in \mathbb{R}^*$,

$$\text{supongamos } a(b+d) = b(a+c)$$

$$\text{luego } ab + ad = ba + bc$$

$$ad + ab = bc + ab$$

$$(*) [ad+ab] + \underline{-(ab)} = [bc+ab] + \underline{-(ab)}$$

$$ad + [ab + \underline{-(ab)}] = bc + [ab + \underline{-(ab)}]$$

$$ad + 0 = bc + 0$$

$$ad = bc$$

$$(\Delta) (ad)d^{-1} = (bc)d^{-1}$$

$$a(dd^{-1}) = b(cd^{-1})$$

$$a(1) = b(cd^{-1})$$

$$a = b(cd^{-1})$$

$$(\square) \Rightarrow b^{-1}a = b^{-1}(b(cd^{-1}))$$

$$\Rightarrow ab^{-1} = (b^{-1}b)(cd^{-1})$$

$$\text{p } ab^{-1} = (1)cd^{-1}$$

$$ab^{-1} = cd^{-1}$$

demostrando lo
pedido

(*)

$-(ab)$ existe y es único
pues $(ab) \in \mathbb{R}$ pues $a, b \in \mathbb{R}$

(\Delta)

d^{-1} existe y es
único pues $d \in \mathbb{R}^*$

(\square)

b^{-1} existe y es
único pues $b \in \mathbb{R}^*$

NOTA: RECUERDA
en cada PASO
ANOTAR el AXIOMA
O PROPIEDAD que
JUSTIFICA el MISMO,
SINO en el CONTROL
HABRÁN DESCUENTOS
(ACÁ ESTÁ PROPUESTO
PARA QUE CUELEN
LA MANO ☺)

- P3 (a) (3 pts)** Usando los axiomas de cuerpo de $\mathbb{R}$, los teoremas de unicidad de elementos neutros e inversos, y la propiedad $a \cdot 0 = 0$, demuestre que: $\forall a \neq 0, \quad (-(a^{-1}) + 1) \cdot a = a + (-1)$. Si necesita alguna propiedad adicional, **debe demostrarla**.

Solución: Claramente:

$$\begin{aligned} (-(a^{-1}) + 1) \cdot a &= (-(a^{-1})) \cdot a + 1 \cdot a && \text{; Ax. Distrib.} && 0.3 \\ &= -(a^{-1} \cdot a) + 1 \cdot a && \text{; Prop * (abajo)} && 0.3 \\ &= -(a \cdot a^{-1}) + a \cdot 1 && \text{; Ax. Conmut. (2 veces)} && 0.4 \\ &= -1 + a && \text{; Axs. El. y EN} && 0.6 \\ &= a + (-1). && \text{; Ax. Conmut.} && 0.3 \end{aligned}$$

Falta demostrar la propiedad *. PDQ: $(-a)b = -(ab)$.

O sea hay que probar que el opuesto de ab vale $(-a)b$.

Es decir, PDQ: $ab + (-a)b = 0$.

En efecto,

$$\begin{aligned} ab + (-a)b &= [a + (-a)] \cdot b && \text{; Ax. Distrib.} && 0.2 \\ &= 0 \cdot b && \text{; Ax. El+} && 0.2 \\ &= b \cdot 0 && \text{; Ax. Conmut.} && 0.2 \\ &= 0. && \text{; Prop. } a \cdot 0 = 0 && 0.2 \end{aligned}$$

P3)b)

Solución: PDQ: El recíproco de $a^{-1}b$ vale $a(b^{-1})$

Es decir, PDQ: $(a^{-1}b) \cdot [a(b^{-1})] = 1$

En efecto:

$$\begin{aligned} (a^{-1}b) \cdot [a(b^{-1})] &= a^{-1} \left(b \cdot [a(b^{-1})] \right) && \text{; Ax. Asoc.} \\ &= a^{-1} \left(b \cdot [b^{-1}a] \right) && \text{; Ax. Conm.} \\ &= a^{-1} \left([b \cdot b^{-1}]a \right) && \text{; Ax. Asoc.} \\ &= a^{-1} (1 \cdot a) && \text{; Ax. Elnv.} \\ &= a^{-1} (a \cdot 1) && \text{; Ax. Conm.*} \\ &= a^{-1} \cdot a && \text{; Ax. ENeutro.} \\ &= a \cdot a^{-1} && \text{; Ax. Conm.} \\ &= 1 && \text{; Ax. Elnv.} \end{aligned}$$

[±0.3 cada axioma no redundante, con máximo 2.0. La conm. * no se exige y no tiene puntaje]

2.0

ramo:

fecha: / /

s: c: a: