Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1001-9 - Otoño 2024 – Introducción al Cálculo

Auxiliar 1: Axiomas de Cuerpo

Profesor: Matias Pavez Signe
Auxiliares: Gisela Abarca Andereya,
Ignacio Dagach Abugattas

P1. Para comenzar

Demuestre que:

a) El neutro multiplicativo es único

b) El inverso multiplicativo es único, (siempre que tenga sentido)

c) (Propuesto) El neutro aditivo es único

d) (Propuesto) El inverso aditivo es único

P2. Matraca

Demuestre, utilizando exclusivamente los axiomas de cuerpo de los reales y los teoremas de unicidad de neutros e inversos, que:

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x \cdot 0 = 0$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, (-1) \cdot x = -x$

c) $\forall x \in \mathbb{R}^*, (-x)^{-1} = -(x^{-1})$

d) $\forall x, y \in \mathbb{R}, xy = 0 \implies x = 0 \vee y = 0$

e) $\forall a, c \in \mathbb{R}, \forall b, d \in \mathbb{R}^*, a(b+d) = b(a+c) \implies ab^{-1} = cd^{-1}$

P3. De controles

Demuestre, utilizando exclusivamente los axiomas de cuerpo de los reales y los teoremas de unicidad de neutros e inversos, que:

a) $\forall x \in \mathbb{R}^*, (-(x^{-1}) + 1) \cdot x = x + (-1)$

b) $\forall x, y \in \mathbb{R}^*, xy^{-1} = (x^{-1}y)^{-1}$

Resumen Auxiliar 1
Ignacio Dagach Abugattas
Introducción al Cálculo - MA1001-9 - Otoño 2024

Axioma 1. (Conmutatividad)

a) Cualesquiera que sean los reales x, y dados, su suma es un real y es independiente del orden en que se usen los dos sumandos, es decir:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \qquad x + y = y + x.$$

b) Cualesquiera que sean los reales x, y dados, su producto es un real y es independiente del orden en que se haga el producto, es decir:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \qquad x \cdot y = y \cdot x.$$

Axioma 2. (Asociatividad)

a) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x + (y + z) = (x + y) + z$

b) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

Axioma 3. (Distributividad)

a) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x(y + z) = xy + xz$

b) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (x + y)z = xz + yz$

Axioma 4a. (Existencia de elemento neutro para la suma)
En $\mathbb{R}$ existen ciertos números denotados por la letra e que no afectan el resultado de la operación suma. Es decir

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ x + e = x.$$

Todo elemento e que cumpla esta propiedad se dirá neutro para la suma.

Axioma 4b. (Existencia de elemento neutro para el producto)
En $\mathbb{R}$ existen ciertos números denotados por la letra e que, por un lado son diferentes de 0 y por otro no afectan en la operación producto. Es decir

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ x \cdot e = x.$$

Todos los elementos e que cumplen esta propiedad se llaman neutros para el producto.

Axioma 5. (Existencia de elementos inversos)

a) Para cada $x \in \mathbb{R}$, existen reales asociados a x, que se llaman opuestos o inversos aditivos de x, que satisfacen:

$$x + \text{opuesto}(x) = 0.$$

b) Para cada $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$, existen inversos multiplicativos o recíprocos de x, que satisfacen:

$$x \cdot \text{recíproco}(x) = 1.$$

Teorema 1.1. *El elemento neutro para la suma es único.*

Teorema 1.2. *El elemento neutro para el producto es único.*

Teorema 1.3.

1. *Para todo $x \in \mathbb{R}$, el inverso aditivo es único.*
2. *Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, el inverso multiplicativo es único.*

- Al único neutro para el producto lo llamaremos “uno” y lo denotaremos 1.
- El axioma dice además que $1 \neq 0$.
- Los inversos aditivos y multiplicativos de x se denotan simplemente por $-x$ y x^{-1}, respectivamente.