MA1001-5 Introducción al Calculo
Profesora: Natalia Ruiz
Auxiliares: Allen Arroyo & Jesús Sayes

Auxiliar 3: Geometría Analítica, Axiomas de Orden e Inecuaciones

P0 [**Mucho Texto**]

Considere el triángulo de vértices $A(0,0), B(2b,0)$ y $C(c,d)$. Sea L la recta $\perp AB$ en el punto B. Por M, punto medio de a AB, se traza la perpendicular al lado AC que corta el eje OY en el punto R. Por el mismo punto M, se traza la perpendicular a BC que corta a la recta L en el punto S. Demuestre que: $RS \perp CM$, asuma $2b < c$ y $b, d > 0$.

P1 [**Lugar Geométrico**]

Determinar el Lugar Geométrico $\mathcal{C}$ de los puntos $P(x,y) \in \mathbb{R}^2$ cuya distancia al punto $(5,0)$ es la mitad de su distancia al punto $(-1,3)$.

P2. [**Todo junto**]

Encuentre las ecuaciones de todas las circunferencias que, en simultáneo, cumplan lo siguiente:

a. Su centro (h,k) pasa por la recta $6x + 4y = -2$.
b. La distancia desde el centro (h,k) hasta el eje OY es igual al radio.
c. La circunferencia pasa por el punto $P = (3,-2)$.

P3. [**Basta de demostraciones**]

a. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ demuestre

$$(a < b) \wedge (c < d) \Rightarrow (a+b)(c+d) < 2(ac+bd)$$

b. Dados $x, y, z \in (0, \infty)$ demuestre que : $(x+y+z)(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}) \geq 9$

Hint: Utilice P2 RP 2 y puede ser útil definir $a = xy^{-1}, b = yz^{-1}$ y $c = zx^{-1}$

P4. [**Absolute Value**]

Determine el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

a. $\dfrac{|x-2|-|x+2|}{x^2-4} \geq 1$ *b.* $x \geq ||x+1|+|x-1|-|x||-1$

c. $|x|-1 \leq \dfrac{|x-1|}{x}$ *d.* [Háganlo] $\dfrac{x^3+x^2+x}{|x-2|-1} \leq 0$

P5. [**Esperar lo inesperado**]

Dado $\alpha > 0$ fijo, se definen los conjuntos solución de las siguientes inecuaciones

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^{2024} + \alpha^2 - x^2 > 0\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} : \alpha^2 - x^2 > 0\}$$

Determine todos los $x \in B$, verifique que $B \subseteq A$ y además responda si $\exists x < 0$ tal que $x \in A$ utilizando lo anterior.

Resumen

Definicion 1 (Lugares Geométricos). *Los conjuntos de puntos del plano $P(x, y)$ que satisfacen alguna condición geométrica o algebraica, los llamaremos Lugares Geométricos. Un solo punto puede ser un lugar geométrico, una circunferencia, una recta, una parábola,hiperbola,etc.*

Definicion 2 (Ecuación de la recta). *Una recta en el plano se representa por $y = mx + n$, donde m es su pendiente y n la intersección con el eje OY.*

Definicion 3 (Ecuación de la recta punto-pendiente y punto-punto). *Para 2 puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1) con pendiente m:*

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Definicion 4 (Paralelismo y perpendicularidad). *Dos rectas son paralelas si tienen la misma pendiente y perpendiculares si el producto de sus pendientes es -1.*

Definicion 5 (Ecuación de la circunferencia). *Dada una circunferencia de centro (h, k) y radio r, la ecuación que la describe viene dada por:*

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Proposicion 1. *La distancia mínima entre una recta $L : ax + by + c = 0$ y un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ es:*

$$d_{min} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Proposicion 2. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$

Proposicion 3. *Si* $0 < x < y \implies x^{-1} > y^{-1} > 0$

Definicion 6. $\forall x \in \mathbb{R}$, *el valor absoluto o modulo de x será*

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

Proposicion 4. *Para el modulo se cumple :*

1. $|x| = 0$ *ssi* $x = 0$
2. $|x| = |-x|$, *mientras que* $|-x| = x$ *es falso.*
3. $|x^2| = |x|^2 = x^2$
4. $|x| \leq a$ *ssi* $-a \leq x \leq a$ *ssi* $x \in [-a, a]$
5. $|x| \geq a$ *ssi* $x \leq -a \vee x \geq a$ *ssi* $x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$
6. $|xy| = |x||y|$
7. $-|x| \leq x \leq |x|$

6. ***Desigualdad Triangular:***

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |x + y| \leq |x| + |y|$$

De 6. se deduce:

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

$$|x| - |y| \leq |x - y|$$

Algoritmo 1 Resolución de inecuaciones con valor absoluto y cociente.

---

1. Tratar de simplificar la expresión
2. Conocer los valores de x que:
   - 2.1 hacen al valor absoluto 0(cuando cambia de signo)
   - 2.2 indefinen la fracción(cuando es 0)
   - 2.3 hacen el numerador 0
3. Dividir $\mathbb{R}$ en intervalos según los valores de x de 2.1
   - 3.1 Eliminar el valor absoluto dependiendo de qué intervalo estamos de 3. Nos quedarán diferentes inecuaciones.
   - 3.2 Aplicar método de puntos críticos(tabla,etc) para cada caso de 3.1 utilizando los valores de 2.2 y 2.3. Tomar especial cuidado con 2.3
     - 3.2.1 Dados los puntos críticos de 2.2 y 2.3 intersectar los intervalos del metodo de puntos críticos con el intervalo de 3. a trabajar respectivamente
4. Unir todas las soluciones finales de 3.2
