MA1001-5 Introducción al Calculo
Profesora: Natalia Ruiz
Auxiliares: Allen Arroyo & Jesús Sayes

Auxiliar 2: Axiomas de Orden e Inecuaciones

P1. [**Basta de demostraciones**]

a. Demuestre que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si $x^2 < x \Rightarrow x^3 < x^2$

b. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ demuestre

$$(a < b) \wedge (c < d) \Rightarrow (a+b)(c+d) < 2(ac+bd)$$

c. Dados $x, y, z \in (0, \infty)$ demuestre que : $(x+y+z)(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}) \geq 9$

Hint: Utilice P2 RP 2 y puede ser útil definir $a = xy^{-1}, b = yz^{-1}$ y $c = zx^{-1}$

P2. [**Absolute Value**]

Determine el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

a. $|2x + |x-1|| \leq 1$

b. $\dfrac{|x-2| - |x+2|}{x^2-4} \geq 1$

c. $x \geq ||x+1| + |x-1| - |x|| - 1$

d. $|x| - 1 \leq \dfrac{|x-1|}{x}$

e. [Propuesto] $\dfrac{x^2 - |x+1|}{|x+1| - 2} \geq 1$

f. [Háganlo] $\dfrac{x^3 + x^2 + x}{|x-2| - 1} \leq 0$

g. $\dfrac{|x+2|}{x-6} - \dfrac{x-1}{|x-3|} < 0$

h. [Propuesto] $\dfrac{|6 - |-8 - 9x^2|| + 4x^6}{x^2 + x + 1} > \dfrac{-3}{125}$

P3. [**Esperar lo inesperado**]

Dado $\alpha > 0$ fijo, se definen los conjuntos solución de las siguientes inecuaciones

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^{2024} + \alpha^2 - x^2 > 0\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} : \alpha^2 - x^2 > 0\}$$

Determine todos los $x \in B$, verifique que $B \subseteq A$ y además responda si $\exists x < 0$ tal que $x \in A$ utilizando lo anterior.

P4. [**Propuesto**] Escriba una inecuación que tenga como solución al conjunto $S = (-\infty, -2] \cup (1, \infty)$

Resumen

Axioma 1 (de tricotomía). *$\forall x \in \mathbb{R}$ una y solo de las siguientes proposiciones es verdadera*

1. $x \in \mathbb{R}_+^*$
2. $(-x) \in \mathbb{R}_+^*$
3. $x = 0$

Axioma 2 (de Clausura). $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$

1. $(x+y) \in \mathbb{R}_+^*$
2. $x \cdot y \in \mathbb{R}_+^*$

Proposicion 1. *Si $x < y, a \in \mathbb{R} \implies x + a < y + a$*

Proposicion 2. *Se cumple:*

1. $x < y, a > 0 \implies ax < ay$
2. $x < y, a < 0 \implies ax > ay$

Proposicion 3. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$

Proposicion 4. *Si $x < y, u < v \implies x + u < y + v$*

Proposicion 5. *Si $0 < x < y, 0 < u < v$ entonces es valido $xu < yv$*

Proposicion 6. *Si $0 < x < y \implies x^{-1} > y^{-1} > 0$*

Observacion 1. *Definiendo $\Delta := b^2 - 4ac$, entonces la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c$ se puede factorizar como:*

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

Recordar que:

$$\begin{cases} x_1, x_2 \in \mathbb{C} & si\ \Delta < 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R} & si\ \Delta \geq 0 \end{cases}$$

Definicion 1. *$\forall x \in \mathbb{R}$, el valor absoluto o modulo de x será*

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

Proposicion 7. *Para el modulo se cumple :*

1. $|x| = 0$ *ssi* $x = 0$
2. $|x| = |-x|$, *mientras que* $|-x| = x$ *es falso.*
3. $|x^2| = |x|^2 = x^2$
4. $|x| \leq a$ *ssi* $-a \leq x \leq a$ *ssi* $x \in [-a, a]$
5. $|x| \geq a$ *ssi* $x \leq -a \vee x \geq a$ *ssi* $x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$
6. $|xy| = |x||y|$
7. $-|x| \leq x \leq |x|$
6. ***Desigualdad Triangular:***

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |x + y| \leq |x| + |y|$$

De 6. se deduce:

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

$$|x| - |y| \leq |x - y|$$

Algoritmo 1 Resolución de inecuaciones con valor absoluto y cociente.

---

1. Tratar de simplificar la expresión
2. Conocer los valores de x que:
   - 2.1 hacen al valor absoluto 0(cuando cambia de signo)
   - 2.2 indefinen la fracción(cuando es 0)
   - 2.3 hacen el numerador 0
3. Dividir $\mathbb{R}$ en intervalos según los valores de x de 2.1
   - 3.1 Eliminar el valor absoluto dependiendo de qué intervalo estamos de 3. Nos quedarán diferentes inecuaciones.
   - 3.2 Aplicar método de puntos críticos(tabla,etc) para cada caso de 3.1 utilizando los valores de 2.2 y 2.3. Tomar especial cuidado con 2.3
     - 3.2.1 Dados los puntos críticos de 2.2 y 2.3 intersectar los intervalos del metodo de puntos críticos con el intervalo de 3. a trabajar respectivamente
4. Unir todas las soluciones finales de 3.2

Observacion 2. *En inecuaciones con valor absoluto el método de puntos críticos es valido agregando detalles. Ver pagina 36-37 apunte.*