Resumen Introducción al Cálculo

Matías Carvajal Pérez
Nicolás Fuenzalida Sáez

12 Límite de Funciones

12.1 Introducción

Definición 1 (Punto de acumulación) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto cualquiera de $\mathbb{R}$. El real $\bar{x} \in \mathbb{R}$ se llama punto de acumulación de A si existe alguna sucesión $(x_n) \subseteq A$ (con valores en A) tal que $x_n \neq \bar{x}, \forall n \geq n_0$ algún $n_0 \in \mathbb{N}$ y $x_n \to \bar{x}$.

El conjunto de los puntos de acumulación de $A \subseteq \mathbb{R}$ se denota A'.

12.2 Definición del límite de funciones

Definición 2 Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea $\bar{x} \in A'$, es decir $\bar{x}$ es un punto de acumulación de A. Diremos que f tiende a $\ell \in \mathbb{R}$ cuando x tiende a $\bar{x}$ (lo cual se denotará $f(x) \to \ell$ cuando $x \to \bar{x}$), o bien que ℓ es el límite de $f(x)$ cuando $x \to \bar{x}$ (lo que se anota $\ell = \lim\limits_{x \to \bar{x}} f(x)$) si para toda sucesión (x_n) con valores en A, convergente a $\bar{x}$ y tal que $x_n \neq \bar{x}$, se cumple que la sucesión de las imágenes $(f(x_n))$ es convergente a ℓ.

12.3 Unicidad del límite

Teorema 1 Si una función f tiene límite cuando $x \to \bar{x}$ entonces dicho límite es único.

12.4 Teoremas derivados de la definición en base a sucesiones

Teorema 2 (Álgebra de límites) Sean f y g dos funciones y $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tales que $\lim\limits_{x \to \bar{x}} f(x) = \ell_1$ y $\lim\limits_{x \to \bar{x}} g(x) = \ell_2$. Entonces:

1. si $\bar{x} \in (\text{Dom}(f))' \cap (\text{Dom}(g))'$ se tiene que:
$$\lim_{x \to \bar{x}} (f+g)(x) = \ell_1 + \ell_2$$
$$\lim_{x \to \bar{x}} (f-g)(x) = \ell_1 - \ell_2$$
$$\lim_{x \to \bar{x}} (fg)(x) = \ell_1 \ell_2$$
2. si $\bar{x} \in (\text{Dom}(f/g))'$ y $\ell_2 \neq 0$ entonces:
$$\lim_{x \to \bar{x}} (f/g)(x) = \ell_1 / \ell_2$$
3. En particular (cuando g es constante) se tiene que $\lim\limits_{x \to \bar{x}} (\alpha f)(x) = \alpha \ell_1$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

12.5 Teorema del Sandwich

Teorema 3 (Sandwich de funciones) Sean f, g y h tres funciones y sea $\bar{x} \in (\text{Dom}(g))'$. Si
$$\exists \delta > 0, \forall x \in \text{Dom}(g) \cap [\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta] \; f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$
y además $\lim\limits_{x \to \bar{x}} f(x) = \lim\limits_{x \to \bar{x}} h(x) = \ell$, entonces $\lim\limits_{x \to \bar{x}} g(x) = \ell$.

12.6 Límite para la composición de funciones

Supongamos que f y g son dos funciones reales. Queremos calcular el límite de la composición $f \circ g$, cuando x tiende a $\bar{x} \in (\text{Dom}(f \circ g))'$. Bajo las siguientes hipótesis:

- $\lim\limits_{x \to \bar{x}} g(x) = l$
- $\lim\limits_{y \to l} f(y) = L$
- y $\forall (x_n) \subseteq \text{Dom}(g)$ tal que $x_n \to \bar{x}$ con $x_n \neq \bar{x}$ para casi todo $n \in \mathbb{N}$, tal que además $g(x_n) \to l$ con $g(x_n) \neq l$, para casi todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene
$$\lim_{x \to \bar{x}} (f \circ g)(x) = \lim_{y \to l} f(y) = L.$$

12.7 Límites importantes

Límites trigonométricos, logarítmicos y exponenciales

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}(x)}{x} = 1$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$
3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x)}{x - 1} = 1$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

12.8 Límite a través de un subconjunto del dominio

Definición 3 (Límite de una función a través de un subconjunto) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sean $B \subseteq A$ y $\bar{x} \in B'$. Diremos que $\ell \in \mathbb{R}$ es el límite de la función f cuando $x \to \bar{x}$ a través del conjunto B si para cualquier sucesión $(x_n) \subset B$ convergente a $\bar{x}$, $x_n \neq \bar{x}$, se tiene que la sucesión $(f(x_n))$ converge a ℓ.

A este límite lo denotaremos por $\ell = \lim\limits_{\substack{x \to \bar{x} \\ x \in B}} f(x)$

Teorema 4 Si $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\bar{x}, \ell \in \mathbb{R}$ son tales que $\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = \ell$, entonces para cualquier subconjunto $B \subseteq A$ tal que $\bar{x} \in B'$ se tiene que $\lim_{\substack{x\to\bar{x}\\ x\in B}} f(x) = \ell$.

Teorema 5 Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A'$. Sean $B, C \subseteq A$ tales que $\bar{x} \in B'$, $\bar{x} \in C'$ y $B \cup C = A$. Si $\lim_{\substack{x\to\bar{x}\\ x\in B}} f(x) = \lim_{\substack{x\to\bar{x}\\ x\in C}} f(x) = \ell$ entonces

$$\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = \ell.$$

12.9 Límites laterales

Definición 4 Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Si denotamos por $A^+ = A \cap (\bar{x}, \infty)$ y $A^- = A \cap (-\infty, \bar{x})$, entonces

i) Se llama límite lateral por la derecha de la función f en $\bar{x}$ a $\lim_{\substack{x\to\bar{x}\\ x\in A^+}} f(x)$.

ii) Análogamente, a $\lim_{\substack{x\to\bar{x}\\ x\in A^-}} f(x)$ se le llama límite lateral por la izquierda de la función f en $\bar{x}$.

El límite lateral por la derecha se denota por $\lim_{\substack{x\to\bar{x}\\ x>\bar{x}}} f(x)$ o $\lim_{x\to\bar{x}^+} f(x)$ y el límite lateral por la izquierda se denota por $\lim_{\substack{x\to\bar{x}\\ x<\bar{x}}} f(x)$ o bien por $\lim_{x\to\bar{x}^-} f(x)$.

Observación Este resultado es muy popular y se enuncia informal y frecuentemente diciendo que una función es *continua* cuando sus límites laterales son iguales a $f(x)$.

12.10 Caracterización de límite sin uso de sucesiones

Teorema 6 (Caracterización $\varepsilon - \delta$ de límite) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\bar{x}$ punto de acumulación de A entonces

$$\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = \ell \iff \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in A \cap ([\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta] \setminus \{\bar{x}\}),$$

$$|f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Observación Otra forma de escribir la caracterización es la siguiente:

$$\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = \ell \iff \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in A,$$
$$[0 < |x - \bar{x}| \leq \delta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon].$$

13 Límites infinitos y hacia el infinito

13.1 Límites hacia $\pm\infty$

Definición 5 Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea ℓ un real fijo.

i) Si A no es acotado superiormente entonces

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists m > 0, \forall x \in A \cap [m, \infty),$$

$$|f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

ii) Si A no es acotado inferiormente entonces

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists m < 0, \forall x \in A \cap (-\infty, m],$$

$$|f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Teorema 7 (Unicidad del límite) Si $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell_1$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell_2$, entonces $\ell_1 = \ell_2$.

Teorema 8 (Álgebra) Si $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones tales que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell_1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell_2$ y $A \cap B$ no es acotado superiormente, entonces

$$\lim_{x\to+\infty} (f+g)(x) = \ell_1 + \ell_2$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f-g)(x) = \ell_1 - \ell_2$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f\cdot g)(x) = \ell_1 \cdot \ell_2$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\ell_1}{\ell_2}, \quad \text{si } \ell_2 \neq 0.$$

Teorema 9 (Sandwich) Si tres funciones f, g, h con dominios A, B, C respectivamente son tales que $\exists m$, tal que $\forall x \in B \cap [m, \infty)$ se cumple que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Entonces si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} h(x) = \ell$, se tiene que $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \ell$.

Asíntotas (I)

Definición 6 (Asíntotas horizontales)

1. Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell_1$ entonces la recta $y = \ell_1$ se llama asíntota horizontal de f.
2. Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell_2$ entonces la recta $y = \ell_2$ se llama asíntota horizontal de f.

13.2 Límites infinitos

Definición 7 (Límites igual a $+\infty$) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Si $\bar{x} \in A'$, entonces

$$\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = \infty \iff \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \cap [\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta],$$

$$f(x) \geq M.$$

2. Si $\bar{x}$ es punto de acumulación de $A \cap (\bar{x}, \infty)$, entonces

$$\lim_{x\to\bar{x}^+} f(x) = \infty \iff \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \cap (\bar{x}, \bar{x}+\delta],$$

$$f(x) \geq M.$$

3. Si $\bar{x}$ es punto de acumulación de $A \cap (-\infty, \bar{x})$, entonces

$$\lim_{x\to\bar{x}^-} f(x) = \infty \iff \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \cap [\bar{x}-\delta, \bar{x}),$$

$$f(x) \geq M.$$

4. Si A no es acotado superiormente, entonces

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \iff \forall M > 0, \exists m > 0, \forall x \in A \cap [m, \infty),$$

$$f(x) \geq M.$$

5. Si A no es acotado inferiormente, entonces

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \iff \forall M > 0, \exists m < 0, \forall x \in A \cap (-\infty, m],$$

$$f(x) \geq M.$$

Definición 8 (Límites igual a $-\infty$) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Si $\bar{x} \in A'$, entonces

$$\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \cap [\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta],$$

$$f(x) \leq M.$$

2. Si $\bar{x}$ es punto de acumulación de $A \cap (\bar{x}, \infty)$, entonces

$$\lim_{x\to\bar{x}^+} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \cap (\bar{x}, \bar{x}+\delta],$$

$$f(x) \leq M.$$

3. Si $\bar{x}$ es punto de acumulación de $A \cap (-\infty, \bar{x})$, entonces

$$\lim_{x\to\bar{x}^-} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \cap [\bar{x}-\delta, \bar{x}),$$

$$f(x) \leq M.$$

4. Si A no es acotado superiormente, entonces

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0, \exists m > 0, \forall x \in A \cap [m, \infty),$$

$$f(x) \leq M.$$

5. Si A no es acotado inferiormente, entonces

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0, \exists m < 0, \forall x \in A \cap (-\infty, m],$$

$$f(x) \leq M.$$

Propiedad 1

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \implies \lim_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Asíntotas (II)

Definición 9 (Asíntotas oblicuas)

1. La recta $y = m_1 x + n_1$ es una asíntota oblicua de f cuando $x \to \infty$ si se cumple que
$$\lim_{x\to\infty} f(x) - (m_1 x + n_1) = 0.$$
2. Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (m_2 x + n_2) = 0$ entonces la recta $y = m_2 x + n_2$ es una asíntota oblicua de f cuando $x \to -\infty$.

Observación Se pueden calcular las constantes m, n de una eventual asíntota oblicua con las fórmulas
$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx.$$
Si ambos límites existen (en particular el segundo) entonces $y = mx + n$ es definitivamente una asíntota oblicua de f. El mismo cálculo se puede realizar cuando $x \to -\infty$.

Definición 10 (Asíntotas verticales) Si $\lim\limits_{x\to\bar{x}^+} f(x) = \pm\infty$ o $\lim\limits_{x\to\bar{x}^-} f(x) = \pm\infty$, se dice que la recta $x = \bar{x}$ es una asíntota vertical de f.

Teorema de composición (I)

Teorema 10 Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell$ y $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$.

Entonces, si el dominio de la composición $f \circ g$ no es acotado superiormente, se cumple que
$$\lim_{x\to\infty} (f \circ g)(x) = \ell.$$

Definición 11 (Límite igual a ℓ^+ o ℓ^-)

1. Diremos que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell^+$ si se cumple que
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell \text{ y } \exists m > 0, \forall x \in \mathrm{Dom}(f) \cap [m, \infty), f(x) > \ell.$$
2. Diremos que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell^-$ si se cumple que
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell \text{ y } \exists m > 0, \forall x \in \mathrm{Dom}(f) \cap [m, \infty), f(x) < \ell.$$
3. Análogamente se definen los límites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell^+$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell^-$.