Resumen Introducción al Cálculo

Matías Carvajal Pérez
Nicolás Fuenzalida Sáez

10 Sucesiones

10.1 Límites y orden

Teorema 1 Sean (u_n) y (w_n) sucesiones convergentes a u y w , respectivamente. Si existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple que

$$u_n \leq w_n,$$

entonces $u \leq w$.

Teorema 2 (Teorema del Sandwich) Sean (u_n) , (v_n) y (w_n) sucesiones reales. Si (u_n) y (w_n) convergen al real ℓ y además tal que

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) u_n \leq v_n \leq w_n,$$

entonces la sucesión (v_n) también converge y $\lim v_n = \ell$.

10.2 Desigualdad de Bernoulli (I)

Propiedad 1 (Desigualdad de Bernoulli (I)) La siguiente propiedad conocida como desigualdad de Bernoulli, nos será muy útil en el uso del Teorema del Sandwich.

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall h > -1) (1 + h)^n \geq 1 + nh.$$

La sucesión (q^n) , para $q \in \mathbb{R}$.

Propiedad 2 1. $\lim q^n = 1$, si $q = 1$.

2. $\lim q^n = 0$, si $|q| < 1$.

3. $\lim q^n$ no existe si $q \in (-\infty, -1] \cup (1, \infty)$.

La sucesión $(q_n)^n$, para $(q_n) \rightarrow q$, con $|q| < 1$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |q_n|^n = 0.$$

La sucesión $(q_n)^n$, para $(q_n) \rightarrow q$, con $|q| > 1$.

Notemos que si $|q| > 1$, la sucesión $((q_n)^n)$ es no acotada, ya que su recíproco converge a cero. Por lo tanto, es una sucesión divergente.

La sucesión $(\sqrt[n]{a})$, para $a \in (0, \infty)$

$$\lim \sqrt[n]{a} = 1.$$

La sucesión $(\sqrt[n]{a_n})$, para $(a_n) \rightarrow a > 0$.

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = 1.$$

10.3 Desigualdad de Bernoulli (II)

Proposición 1

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall h > 0, (1 + h)^n \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2$$

o equivalentemente

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall h > 0, \frac{1}{(1 + h)^n} \leq \frac{1}{1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2}.$$

La sucesión $(\sqrt[n]{n})$.

$$(\sqrt[n]{n}) \rightarrow 1.$$

La sucesión $(n^k q^n)$.

La sucesión $(n^k q^n)$, para $k \in \mathbb{N}$ y $q \in (-1, 1)$.

$$(n^k q^n) \rightarrow 0.$$

10.4 Desigualdad de Bernoulli (III)

Proposición 2

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left(\forall u \in \left(-1, \frac{1}{n} \right) \right), (1 + u)^n \leq \frac{1}{1 - nu}.$$

La sucesión $(1 + h_n)^n$, para (h_n) y (nh_n) nulas.

Proposición 3 Se tiene que

$$\lim(1 + h_n)^n = 1,$$

cuando (h_n) y (nh_n) son sucesiones nulas.

10.5 Sucesiones monótonas

Definición 1 Sea (s_n) una sucesión real. Entonces:

- Diremos que (s_n) es una sucesión creciente a partir de n_0 si $\forall n \geq n_0$ se tiene $s_{n+1} \geq s_n$.
- Diremos que (s_n) es una sucesión decreciente a partir de n_0 si $\forall n \geq n_0$ se tiene $s_{n+1} \leq s_n$.

Si las desigualdades se satisfacen en forma estricta, es decir $>$ o $<$, entonces hablaremos de sucesiones estrictamente crecientes o estrictamente decrecientes, según sea el caso.

Si una sucesión es creciente, decreciente, estrictamente creciente o estrictamente decreciente, entonces la llamaremos sucesión monótona.

Teorema 3 Si (s_n) es una sucesión (estrictamente) creciente a partir

de n_0 y acotada superiormente entonces es convergente y

$$\lim s_n = \sup\{s_n : n \geq n_0\}.$$

Si (s_n) es una sucesión (estrictamente) decreciente a partir de n_0 y acotada inferiormente entonces es convergente y

$$\lim s_n = \inf\{s_n : n \geq n_0\}.$$

10.6 El número e

$$s_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

La sucesión definida es creciente y acotada superiormente. Se define

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

El número e es conocido como el *número de Euler* y es aproximadamente $e \approx 2,718281828\dots$

II La función exponencial

Sabemos lo siguiente para la sucesión

$$a_n = (1 + h_n)^n$$

1. Si $\lim h_n \in (-2, 0)$ entonces $\lim a_n = 0$.
2. Si $\lim h_n \notin (-2, 0)$ entonces $\lim a_n$ no existe.
3. Si $\lim h_n = 0$ y $\lim nh_n = 0$ entonces $\lim a_n = 1$.
4. Si $\lim h_n = 0$, $h_n < 0$ y $\lim \frac{1}{nh_n} = 0$ entonces $\lim a_n = 0$.
5. Si $\lim h_n = 0$, $h_n > 0$ y $\lim \frac{1}{nh_n} = 0$ entonces $\lim a_n$ no existe.
6. $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, donde e es un número mayor que 2 y menor que 4.

II.1 El límite $\lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ existe

Teorema 4 Para todo $x \in \mathbb{R}$, la sucesión

$$s_n := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

converge.

Definición 2 La función exponencial está definida mediante la expresión:

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Proposición 4 El dominio de la función exponencial es $\mathbb{R}$.

Propiedades de la función exponencial

Proposición 5 (Desigualdad Fundamental) La función exponencial satisface la siguiente desigualdad. Para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp(x) \geq 1 + x.$$

Proposición 6 (Producto de exponenciales) Para todo $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x + y).$$

Proposición 7 (Acotamiento y ceros) Para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp(x) > 0.$$

En consecuencia la función exponencial es acotada inferiormente y no tiene ceros.

Propiedad 3 Mediante la aplicación del producto de exponenciales se prueba que

- $(\forall x \in \mathbb{R}) \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.
- $(\forall x, y \in \mathbb{R}) \exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

- Para $x < 1$, $\exp(x) \leq \frac{1}{1 - x}$.

Proposición 8 (Crecimiento e inyectividad) Para todo $x, y \in \mathbb{R}$,

$$x < y \iff \exp(x) < \exp(y).$$

En consecuencia la función exponencial es estrictamente creciente y por lo tanto inyectiva.

Proposición 9 (Función exponencial y exponentes) Mediante la aplicación del producto de exponenciales se prueba que

- Para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $p \in \mathbb{N}$, $\exp(px) = (\exp(x))^p$.
- $\lim \exp(-n) = \lim \frac{1}{e^n} = 0$.
- Para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $q \in \mathbb{N}$, $\exp\left(\frac{x}{q}\right) = \sqrt[q]{\exp(x)}$.
- $\lim \exp\left(\frac{1}{n}\right) = \lim \sqrt[n]{e} = 1$.

Proposición 10 (Biyectividad) La función $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ es sobreyectiva.

II.2 Función logaritmo natural

Definición 3 (Logaritmo natural) La función $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ es inyectiva y epiyectiva en consecuencia biyectiva. Su función inversa se llama *función logaritmo natural* o *de Neper*,

$$\ln : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \ln(x) = \exp^{-1}(x).$$

Observación • Para todo $x \in (0, \infty)$, $\exp(\ln(x)) = x$.

- Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\ln(\exp(x)) = x$. En particular, $\ln(e) = 1$ y $\ln(1) = 0$.
- La función $\ln$ es estrictamente creciente pues es la inversa de una función estrictamente creciente.
- El único cero de la función $\ln$ es 1.
- $\ln$ no es acotada ni superior ni inferiormente: $\ln(0, \infty) = \mathbb{R}$.

Proposición 11 (Suma y diferencia de logaritmos)

$$\forall x, y \in (0, \infty), \ln(x) + \ln(y) = \ln(xy) \text{ y } \ln(x) - \ln(y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right).$$

Proposición 12 (Desigualdad fundamental) La función logaritmo natural satisface las siguientes desigualdades, para todo $x \in (0, \infty)$,

$$\ln(x) \leq x - 1,$$

y

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x).$$

Definición 4 (Definición de exponente irracional) Para todo $a \in (0, \infty)$ y $n \in \mathbb{N}$ las expresiones a^n , a^{-n} y $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ tienen un significado. Ahora, vamos a extender esta definición para a^α , con $\alpha \in \mathbb{R}$. Sean $a \in (0, \infty)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Se define a^α como:

$$a^\alpha := \exp(\alpha \ln(a)).$$

Proposición 13 Las siguientes propiedades son consecuencia directa de la definición de a^α .

1. $\forall a \in (0, \infty), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ln(a^\alpha) = \alpha \ln(a)$.
2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, a^{\alpha+\beta} = a^\alpha a^\beta$.
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, (a^\alpha)^{-1} = a^{-\alpha}$.
4. $\forall \alpha, x \in \mathbb{R}, (\exp(x))^\alpha = \exp(\alpha x)$, en particular $\exp(\alpha) = e^\alpha$.
5. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$.

II.3 La función a^x

Definición 5 Para $a > 0$ se define la función a^x por la fórmula

$$a^x = \exp(x \ln(a)).$$

II.4 Logaritmos con base $a > 0, a \neq 1$

Definición 6 Sea $a \in (0, \infty), a \neq 1$. Se define la función logaritmo en base a por:

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Observación 1. La función $\log_a$ es estrictamente creciente si $a > 1$.

2. La función $\log_a$ es estrictamente decreciente si $a \in (0, 1)$.

3. La función $\log_a$ es la inversa de la función a^x .

Proposición 14 (Suma de logaritmos)

- Para todo $x, y, a \in (0, \infty)$ y $a \neq 1$ se cumple que $\log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(xy)$.
- (Cambio de base) Para todo $x, a, b \in (0, \infty)$ y $a, b \neq 1$ se cumple que $\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$.

II.5 Límites exponenciales y logarítmicos

Proposición 15 Sea $(a_n) \rightarrow a$, entonces

1. $(e^{a_n}) \rightarrow e^a$.
2. $\left(\frac{e^{a_n} - e^a}{a_n - a}\right) \rightarrow e^a$.

Proposición 16 Sea $a_n \rightarrow a$, con a_n y a positivos. Entonces

1. $(\ln(a_n)) \rightarrow \ln(a)$.
2. $\left(\frac{\ln(a_n) - \ln(a)}{a_n - a}\right) \rightarrow \frac{1}{a}$.

Proposición 17 Sea $(a_n) \rightarrow a$, entonces

1. $(\sin(a_n)) \rightarrow \sin(a)$.
2. $(\cos(a_n)) \rightarrow \cos(a)$.