Resumen Introducción al Cálculo

Matías Carvajal Pérez
Nicolás Fuenzalida Sáez

8 Acotamiento de subconjuntos de $\mathbb{R}$

8.1 Cota superior e inferior

Definición 1 (Acotado superiormente) Un conjunto A es acotado superiormente si existe un real M que es mayor que todos los elementos del conjunto A, es decir,

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in A) \text{ tal que: } x \leq M.$$

A este número M, se le llamará cota superior de A.

Definición 2 (Acotado inferiormente) Un conjunto A es acotado inferiormente si existe un real m que es menor que todos los elementos del conjunto A, es decir,

$$(\exists m \in \mathbb{R})(\forall x \in A) \text{ tal que: } m \leq x.$$

A este número m, se le llamará cota inferior de A.

Definición 3 Un conjunto acotado superior e inferiormente, se dice **acotado**.

Máximo y mínimo

Definición 4 (Máximo) Diremos que un conjunto A posee máximo, si posee una cota superior que pertenece al conjunto.

Definición 5 (Mínimo) Diremos que un conjunto A posee mínimo, si posee una cota inferior que pertenece al conjunto.

Supremo e ínfimo

Definición 6 (Supremo) Diremos que un conjunto A posee supremo, si existe un real s que satisface las siguientes condiciones:

1. s es una cota superior de A.
2. Cualquier otra cota superior de A es mayor que s.

Al real s, lo llamaremos supremo de A y se denotará por $\sup(A)$.

Definición 7 (ínfimo) Diremos que un conjunto A posee ínfimo, si existe un real u que satisface las siguientes condiciones:

1. u es una cota inferior de A.
2. Cualquier otra cota inferior de A es menor que u.

Al real u, lo llamaremos ínfimo de A y se denotará por $\inf(A)$.

8.2 Características de intervalos

Resumimos ahora las características anteriores en el caso de intervalos, dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$:

	min	max	ínf	sup
$[a, b]$	a	b	a	b
(a, b)	$\nexists$	$\nexists$	a	b
$[a, b)$	a	$\nexists$	a	b
$(a, b]$	$\nexists$	b	a	b
$(-\infty, b]$	$\nexists$	b	$\nexists$	b
$(-\infty, b)$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	b
(a, ∞)	$\nexists$	$\nexists$	a	$\nexists$
$[a, \infty)$	a	$\nexists$	a	$\nexists$

8.3 Propiedades del supremo

Observación Siempre se tendrá que si el mínimo m de un conjunto A existe entonces el ínfimo u de A también existe y son iguales. Esto es porque, el mínimo m es una cota inferior de A y por la definición de ínfimo tendremos que $m < u$.

Por otro lado, como m pertenece al conjunto, toda cota inferior debe ser menor que él, en particular el ínfimo u, es decir $u < m$. Por lo tanto $m = u$.

Lo mismo se tendrá para máximo y supremo.

Proposición 1 Sean A y B dos conjuntos, definimos $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$ y $A \cdot B = \{x \cdot y : x \in A, y \in B\}$, entonces

- $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
- $\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$. Para $A, B \subseteq [0, \infty)$.

8.4 Axioma del supremo

Axioma 1 (Axioma del Supremo) Todo conjunto no vacío y acotado superiormente posee un supremo.

Observación

- Se puede demostrar que todo conjunto no vacío acotado inferiormente pose ínfimo. En efecto, basta verificar que $\inf(A) = -\sup(-A)$.
- No es cierta la propiedad si se cambia supremo por máximo.

8.5 Aplicaciones del Axioma de Supremo

Definición 8 (Parte entera) La parte entera de un real $x > 0$, se definirá como el supremo del conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq x\}$. Esto está bien definido pues el conjunto A es acotado superiormente por x y además $0 \in A$. Por lo tanto por el axioma del supremo, el conjunto A posee supremo. Este supremo será denotado por $[x]$ y se llamará cajón inferior de x o parte entera de x.

Teorema 1 Los números naturales no son acotados superiormente.

Teorema 2 (Propiedad Arquimediana) El conjunto $\mathbb{R}$ es arquimediano, es decir, para todo real $x > 0$, existe un natural $n \in \mathbb{N}$, tal que $n \cdot x > 1$.

Teorema 3 **($\star$)** Los racionales son densos en los reales. Esto significa que dados dos reales x, y con $x < y$, entonces existe un racional r tal que $x < r < y$.

Definición 9 (Raíz cuadrada de 2)

$$\sqrt{2} = \sup\{r \in \mathbb{R} : r^2 \leq 2\}.$$

Definición 10 (Raíz cuadrada de un número real positivo)

$$\sqrt{x} = \sup\{r \in \mathbb{R} : r^2 \leq x\}.$$

Definición 11 (Raíz n-ésima de un número real positivo)

$$\sqrt[n]{x} = \sup\{r \geq 0 : r^n \leq x\}.$$

8.6 Números irracionales

$\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ se denomina $\mathbb{I}$ y se llaman irracionales.

Propiedad 1
- $x, y \in \mathbb{Q} \Longrightarrow x \pm y \in \mathbb{Q}$.
- $x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{I} \Longrightarrow x + y \in \mathbb{I}$.
- $x \in \mathbb{Q}^*, y \in \mathbb{I} \Longrightarrow x \cdot y \in \mathbb{I}$.

El teorema ($\star$) puede extenderse a $\mathbb{I}$:

Proposición 2

$$\forall x, y \in \mathbb{Q},\ x < y,\ \exists i \in \mathbb{I},\ x < i < y.$$

9 Sucesiones

Definición 12 (Sucesión) Una sucesión real es una función:

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto f(n)$$

- En lugar de escribir s, se anota como (s_n), $\{s_n\}$, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$, $(s_n)_{n=0}^{\infty}$.
- Informalmente se anota lo siguiente
$$(s_n) = (s_0, s_1, s_2, \ldots, s_j, s_{j+1}, \ldots),$$
donde $j \in \mathbb{N}$.
- Aceptaremos muchas veces que un número finito de términos de la sucesión no estén definidos, o sea, funciones cuyo dominio no sea exactamente $\mathbb{N}$.

9.1 Convergencia de sucesiones

Definición 13 (Convergencia (definición informal)) Sea (s_n) una sucesión real y sea $\ell \in \mathbb{R}$. Diremos que (s_n) converge a ℓ, o bien que los términos s_n tienden a ℓ (lo que se anota $s_n \to \ell$), si dado cualquier intervalo cerrado del tipo $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ con $\varepsilon > 0$, sólo una cantidad finita de términos de la sucesión quedan fuera de él. Es decir, todo el resto de los términos de esta sucesión están dentro del intervalo.

Definición 14 (Convergencia) Diremos que la sucesión (s_n) converge a ℓ o bien que los términos s_n tienden a ℓ (lo cual anotaremos $s_n \to \ell$) si se cumple que:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ s_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon].$$

Observación Las siguientes expresiones son equivalentes a la anterior:

$$\begin{aligned}
&\iff (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ \ell - \varepsilon \leq s_n \leq \ell + \varepsilon \\
&\iff (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ |s_n - \ell| \leq \varepsilon \\
&\iff (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ |s_n - \ell| < \varepsilon \\
&\iff (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \geq n_0)\ |s_n - \ell| \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Cuando una sucesión no converge a real alguno, se dice que es una **sucesión divergente**.

Teorema 4 Si (s_n) es una sucesión que converge a $\ell_1 \in \mathbb{R}$ y también a $\ell_2 \in \mathbb{R}$, entonces necesariamente $\ell_1 = \ell_2$.

9.2 Límite

Definición 15 (Definición de límite de una sucesión) Si (s_n) es una sucesión que converge a ℓ, entonces ℓ se llama *límite* de la sucesión, lo cual se anotará:

$$\ell = \lim s_n \quad \text{o bien} \quad \ell = \lim_n s_n \quad \text{o bien} \quad \ell = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

9.3 Álgebra de sucesiones nulas y acotadas

Definición 16 (Definición de sucesión nula) (s_n) se llamará sucesión nula si $s_n \to 0$.

Definición 17 (Sucesión acotada) (s_n) se llamará sucesión acotada si
$$(\exists M > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |s_n| \leq M.$$

Definición 18 (Álgebra de sucesiones) Sean (u_n) y (v_n) sucesiones y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Se definen las nuevas sucesiones $(u_n + v_n)$, $(u_n - v_n)$, $(u_n \cdot v_n)$, (u_n/v_n) y (λu_n) de la forma normal, es decir:

- $(u_n + v_n) = (u_0 + v_0, u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n, \ldots)$
- $(u_n - v_n) = (u_0 - v_0, u_1 - v_1, u_2 - v_2, \ldots, u_n - v_n, \ldots)$
- $(u_n \cdot v_n) = (u_0 \cdot v_0, u_1 \cdot v_1, u_2 \cdot v_2, \ldots, u_n \cdot v_n, \ldots)$
- $(u_n/v_n) = (u_0/v_0, u_1/v_1, u_2/v_2, \ldots, u_n/v_n, \ldots)$
Ésta es una sucesión sólo cuando $v_n = 0$ sólo para un número finito de términos.
- $(\lambda u_n) = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3, \ldots, \lambda u_n, \ldots)$

Teorema 5 Sean $(u_n), (v_n)$ sucesiones. Las siguientes proposiciones son ciertas

1. (u_n) es nula si y sólo si $(|u_n|)$ es nula.
2. Si (u_n) es una sucesión nula entonces (u_n) es una sucesión acotada.
3. Si (u_n) es una sucesión nula y $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |v_n| \leq u_n$ entonces (v_n) es una sucesión nula.
4. Si (u_n) y (v_n) son sucesiones nulas entonces $(u_n + v_n)$ y $(u_v \cdot v_n)$ son sucesiones nulas.
5. Si (u_n) y (v_n) son sucesiones acotadas entonces $(u_n + v_n)$ y $(u_v \cdot v_n)$ son sucesiones acotadas.
6. Si (u_n) es una sucesión nula y (v_n) es una sucesión acotada entonces $(u_n \cdot v_n)$ es una sucesión nula. Un caso particular de esto es cuando $v_n = c$ constante.

9.4 Álgebra de sucesiones convergentes

Proposición 3 Sea (s_n) una sucesión de números reales entonces $s_n \to \ell \iff (s_n - \ell)$ es una sucesión nula.

Proposición 4 Sea (s_n) una sucesión de números reales. Si (s_n) es convergente entonces (s_n) es acotada.

Proposición 5 (Álgebra de límites) Sean (u_n) y (v_n) dos sucesiones convergentes a u y v, respectivamente. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces las sucesiones $(u_n + v_n)$, $(u_n - v_n)$, $(u_n \cdot v_n)$ y (λu_n) son también convergentes a $u + v$, $u - v$, $u \cdot v$ y λu, respectivamente. Es decir, si $u_n \to u$ y $v_n \to v$ entonces:

- $\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n$
- $\lim(u_n - v_n) = \lim u_n - \lim v_n$
- $\lim(u_n \cdot v_n) = \lim u_n \cdot \lim v_n$
- $\lim(\lambda u_n) = \lambda \lim u_n$

Cuociente de Sucesiones

Proposición 6 Si (s_n) es una sucesión nula entonces la sucesión $(\frac{1}{s_n})$, de estar bien definida, es no acotada y en consecuencia no es convergente.

Proposición 7 La sucesión $((-1)^n)$ no converge.

Proposición 8 Sea (s_n) una sucesión real. Si (s_n) converge a $\ell \neq 0$ entonces:

1. $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)$ tal que s_n tiene el mismo signo de ℓ (es decir $s_n \cdot \ell > 0$).
2. La sucesión $(\frac{1}{s_n})$ es acotada.

Cuociente

Proposición 9 Sean (u_n) y (v_n) dos sucesiones convergentes a u y v respectivamente. Si $v \neq 0$, la sucesión (u_n/v_n) es convergente a (u/v). Es decir

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}.$$

9.5 Límites importantes (I)

- $s_n = a$, para $a \in \mathbb{R}$, satisface $\lim s_n = a$.
- $\lim \dfrac{1}{n} = 0$.
- $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0$, para $k \in \mathbb{N}$.
- $s_n = n^k$, para $k \in \mathbb{N}$, no es acotada luego diverge.
- $$s_n = \frac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \cdots + b_1 n + b_0},$$
  para $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
  - si $p < q$, entonces $s_n \to 0$
  - si $p = q$, entonces $s_n \to \dfrac{a_p}{b_q}$
  - si $p > q$, entonces $\left(\dfrac{1}{s_n}\right) \to 0$. Entonces (s_n) no es acotada y luego diverge.
- $\lim \dfrac{n!}{n^n} = 0$.
- $\lim \dfrac{a^n}{n!} = 0$, para $a \in \mathbb{R}$.