

Auxiliar 7: Axioma del Supremo

Profesor: Patricio Felmer
Auxiliares: Matías Carvajal y Nicolás Fuenzalida

◦ ¡Conjuntos acotados! ¿O no?

Determine explícitamente los siguientes conjuntos e identifique, si es posible, sup, ínf, máx, mín.

a) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt[4]{\frac{1-x}{2+x}} \in \mathbb{R} \right\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x)(\sin(x) - 1) = 0\}$

◦ Un poco de esto y un poco de aquello

a) Si $a \in \mathbb{R}$ es una cota superior e inferior de $C \subseteq \mathbb{R}$, con $C \neq \emptyset$. Pruebe que $C = \{a\}$.

b) Sean A, B subconjuntos no vacíos de \mathbb{R} tales que $A \subseteq B$ y B es acotado superiormente. Pruebe que existen $\sup(A)$ y $\sup(B)$ y que $\sup(A) \leq \sup(B)$.

c) Sea:

$$D = \left\{ \frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

Demuestre que $\inf(D) = 1$.

◦ Trigonometría en acción

1. Pruebe que

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})(\cos(x+y) = 0 \implies \sin(x+2y) = \sin(x)).$$

2. Sea un triángulo de ángulos internos α, β, γ tales que los lados opuestos a dichos ángulos miden a, b, c respectivamente. Demuestre que:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\sin(\alpha) - \sin(\beta)}{\sin(\alpha) + \sin(\beta)}$$

◦ Ayuden al equipo docente, sección 2!

Matías y Nicolás observan a Patricio en la cima de una torre que se encuentra perpendicular al suelo. Nicolás se encuentra a x metros de la torre y observa a Patricio con un ángulo α desde el lado izquierdo de la torre, mientras que Matías está a y metros de la torre y observa a Patricio con un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ desde el lado derecho de la torre. Se sabe que la distancia entre Nicolás y Matías es de d metros, con $d > x$ y que Patricio está a una altura de z metros.

a) Determine α en función de d y x .

b) Si $d = 30$ y $x = 15$. Encuentre $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

