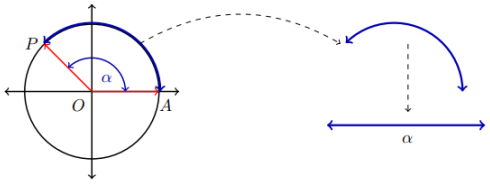
Resumen Introducción al Cálculo

Matías Carvajal Pérez
Nicolás Fuenzalida Sáez

6 Trigonometría

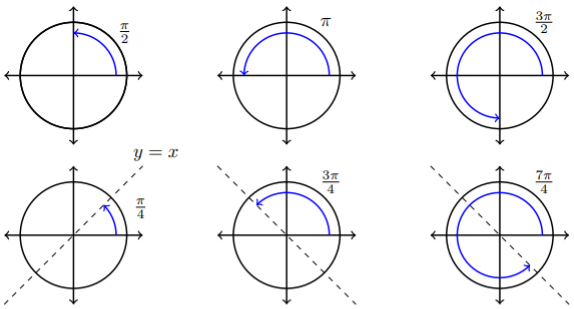
6.1 Medida de ángulos en radianes



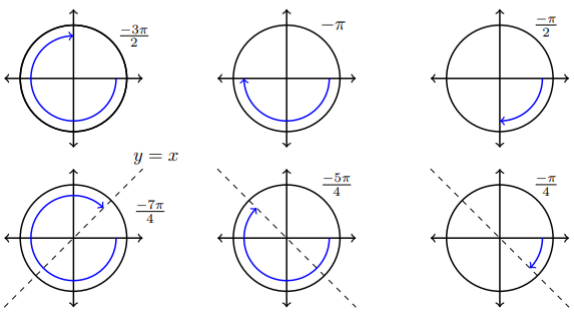
Definición 1 (Ángulo positivo) Dado un punto P en la circunferencia, llamaremos ángulo positivo AOP al ángulo en el que hay que rotar el rayo OA, en el sentido contrario de los punteros del reloj, para obtener el rayo OP.

La medida de este ángulo en radianes, será el largo del arco de circunferencia que va desde A hasta P, moviéndose en el sentido contrario a los punteros del reloj.

Definición 2 (Ángulo negativo) Llamaremos **ángulo negativo** AOP al ángulo en el que hay que rotar el rayo OA, en el sentido de los punteros del reloj, para obtener el rayo OP.



Algunos ángulos positivos



Algunos ángulos negativos

6.2 Funciones trigonométricas

Dado $x \in \mathbb{R}$, sea P_x el punto de la circunferencia de centro $(0,0)$ y de radio 1, que se obtiene al girar un ángulo cuya medida en radianes es x, partiendo desde el punto $(1,0)$.

Definición 3 (Función coseno) Definimos la función **coseno** ($\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) como aquella que a cada x le asocia la abscisa del punto P_x.

Definición 4 (Función seno) La función **seno** ($\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) queda definida como aquella que a cada x le asocia la ordenada del punto P_x.

A partir de estas definiciones, tenemos la Identidad Trigonométrica Fundamental:

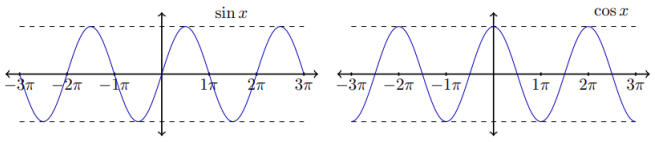
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

Propiedad 1 (Función coseno)

- La función es periódica de periodo 2π.
- Es una función par. Por lo tanto bastará con conocerla en $I = [0, \pi]$ para tener su comportamiento global.
- Tiene un cero en $x = \frac{\pi}{2}$, por lo que $\cos^{-1}(\{0\}) = \{x = \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.
- En $[0, \frac{\pi}{2}]$ es positiva y es negativa en $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.
- Decrece en $[0, \pi]$.

Propiedad 2 (Función seno)

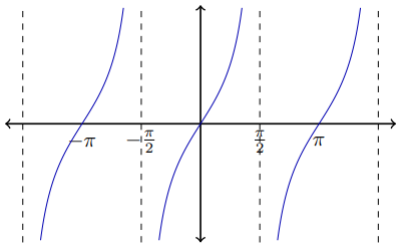
- La función es periódica de periodo 2π.
- Es una función impar. Por lo tanto bastará con conocerla en $I = [0, \pi]$ para tener su comportamiento global.
- Tiene un cero en $x = 0$ y otro en $x = \pi$. Luego $\operatorname{sen}^{-1}(\{0\}) = \{x = k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.
- En $[0, \pi]$ es siempre positiva.
- Crece en $[0, \frac{\pi}{2}]$ y decrece en $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.



Definición 5 (Función tangente) Se define la función tangente por $\tan : A \to \mathbb{R}$, donde $A = \{x \in \mathbb{R} : \cos(x) \neq 0\}$ que a x asocia $\tan(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$.

Propiedad 3 (Función tangente)

- La función es periódica de periodo π.
- Sus ceros son los ceros de la función sen.
- Es una función impar
- En positiva en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$.
- Es estrictamente creciente en cada intervalo de la forma $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$.



6.3 Trigonometría del triángulo rectángulo

Consideremos un triángulo rectángulo de vértices A, B y C (el vértice A en el origen y rectángulo en C), de lados a, b y c, opuestos a los vértices A, B y C respectivamente, y ángulos interiores α, β y γ, se tiene que:

Teorema 1 En un triángulo rectángulo se satisface que

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{a}{c} \quad \text{y} \quad \tan(\alpha) = \frac{a}{b}.$$

6.4 Funciones recíprocas

Definición 6 (Funciones recíprocas) Se definen:

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$$

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\csc(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$$

Propiedad 4

- Si $\cos(x) \neq 0$, entonces $\tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)$. Esto se obtiene al dividir la identidad fundamental por $\cos^2(x)$.
- Si $\operatorname{sen}(x) \neq 0$, entonces $\cot^2(x) + 1 = \csc^2(x)$. Esto se obtiene al dividir la identidad fundamental por $\operatorname{sen}^2(x)$.

x	sen x	cos x	tan x	cot x	sec x	csc x
0	0	1	0	-	1	-
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	$-$	1	$-$	1
π	0	-1	0	$-$	-1	$-$
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$-$	0	$-$	-1

6.5 Independencia de sistemas de coordenadas

Propiedad 5 (Diferencia de ángulos en coseno)

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos(\beta)\cos(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta)\operatorname{sen}(\alpha).$$

6.6 Propiedades importantes

La ecuación anterior nos arroja una gran cantidad de información que veremos a continuación:

- $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$, lo que significa que la función cos es par.
- $\cos(\beta - \pi/2) = \operatorname{sen}(\beta)$.
- $\cos(\beta) = \operatorname{sen}(\beta + \pi/2)$.
- $\cos(\beta + \pi/2) = -\operatorname{sen}(\beta)$.
- $-\cos(\beta) = \operatorname{sen}(\beta - \pi/2)$.
- $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha)$, lo que significa que la función sen es impar.
- $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$, lo que significa que la función tan es impar.

6.7 Suma y resta de ángulos

Propiedad 6 (Suma de ángulos en coseno)

$$\cos(\beta + \alpha) = \cos(\beta)\cos(\alpha) - \operatorname{sen}(\beta)\operatorname{sen}(\alpha).$$

Propiedad 7 (Suma de ángulos en seno)

$$\operatorname{sen}(\beta + \alpha) = \operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha) + \cos(\beta)\operatorname{sen}(\alpha).$$

Propiedad 8 (Diferencia de ángulos en seno)

$$\operatorname{sen}(\beta - \alpha) = \operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha) - \cos(\beta)\operatorname{sen}(\alpha).$$

Regla de los cuadrantes.

- $\operatorname{sen}(2\pi + \alpha) = \operatorname{sen}(\alpha)$ y $\cos(2\pi + \alpha) = \cos(\alpha)$
- $\operatorname{sen}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha)$ y $\cos(2\pi - \alpha) = \cos(\alpha)$

1. $\operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha)$ y $\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$
2. $\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}(\alpha)$ y $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$
3. $\cos(\pi/2 - \alpha) = \operatorname{sen}(\alpha)$ y $\operatorname{sen}(\pi/2 - \alpha) = \cos(\alpha)$
4. $\cos(\pi/2 + \alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha)$ y $\operatorname{sen}(\pi/2 + \alpha) = \cos(\alpha)$

6.8 Identidades útiles

Identidades

1. $\tan(x+y) = \dfrac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$
2. $\tan(x-y) = \dfrac{\tan(x)-\tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)}$
3. $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$
4. $\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2(x)$
5. $\operatorname{sen}^2(x) = \dfrac{1}{2}(1-\cos(2x))$ y $\cos^2(x) = \dfrac{1}{2}(1+\cos(2x))$
6. $\left|\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right| = \sqrt{\dfrac{1}{2}(1-\cos(x)}$ y
   $\left|\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\right| = \sqrt{\dfrac{1}{2}(1+\cos(x)}$
7. $\left|\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right| = \sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}$, $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos(x)}$ y
   $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1-\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$
8. $\operatorname{sen}(x) \pm \operatorname{sen}(y) = 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{x \pm y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x \mp y}{2}\right)$
9. $\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
10. $\cos(x) - \cos(y) = -2\operatorname{sen}\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
11. $\tan(x) \pm \tan(y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x \pm y)}{\cos(x)\cos(y)}$

Definición 7 (Co-función)

- $f = \operatorname{sen} \Longrightarrow cof = \cos$.
- $f = \cos \Longrightarrow cof = \operatorname{sen}$.
- $f = \tan \Longrightarrow cof = \cot$.
- $f = \cot \Longrightarrow cof = \tan$.
- $f = \sec \Longrightarrow cof = \csc$.
- $f = \csc \Longrightarrow cof = \sec$.

7 Trigonometría

7.1 Funciones trigonométricas inversas

Definición 8 (Arcoseno) Llamamos arcoseno a la función inversa de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, es decir:

$$\operatorname{arc\,sen} : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$$

tal que

$$y = \operatorname{arc\,sen}(x) \iff x = \operatorname{sen}(y)$$

Definición 9 (Arcocoseno) Llamamos arcocoseno a la función inversa de $f(x) = \cos(x)$, o sea:

$$\operatorname{arc\,cos} : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

tal que

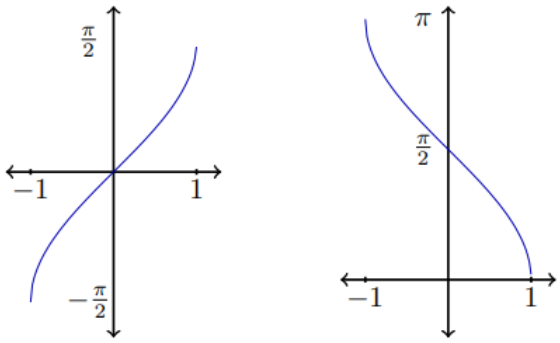
$$y = \operatorname{arc\,cos}(x) \iff x = \cos(y)$$

Definición 10 (Arcotangente) Llamamos arcotangente a la función inversa de $f(x) = \tan(x)$, o sea:

$$\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$$

tal que

$$y = \arctan(x) \iff x = \tan(y)$$



Gráficos de arcoseno y arcocoseno.

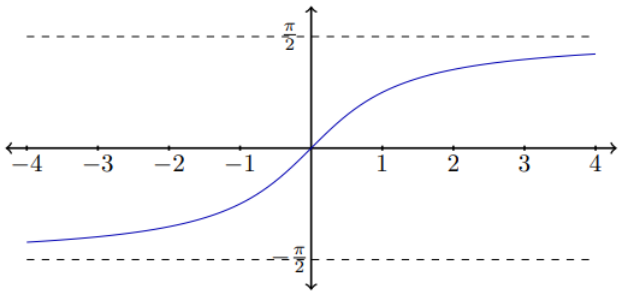


Gráfico de arcotangente.

7.2 Ecuaciones trigonométricas

1. Consideremos la ecuación $\operatorname{sen}(x) = a$ donde $a \in \mathbb{R}$, si $|a| \leq 1$ es fácil encontrar una solución $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$, que corresponde a $\alpha = \operatorname{arc\,sen}(a)$. La solución general suele escribirse de la siguiente forma:

   $$x = k\pi + (-1)^k \alpha$$

   donde $k \in \mathbb{Z}$.

2. Consideremos la ecuación $\cos(x) = a$ donde $a \in \mathbb{R}$, si $|a| \leq 1$ es fácil encontrar una solución $\alpha \in [0, \pi]$, que corresponde a $\alpha = \operatorname{arc\,cos}(a)$. La solución general suele escribirse de la siguiente forma:

   $$x = 2k\pi \pm \alpha$$

   donde $k \in \mathbb{Z}$.

3. Consideremos la ecuación $\tan(x) = a$ donde $a \in \mathbb{R}$, es fácil encontrar una solución $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$, que corresponde a $\alpha = \arctan(a)$. La solución general suele escribirse de la siguiente forma:

   $$x = k\pi + \alpha$$

   donde $k \in \mathbb{Z}$.

7.3 Aplicaciones en triángulos

Teorema 2 (Teorema del seno)

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{a} = \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{b} = \frac{\operatorname{sen}(\gamma)}{c} = k$$

Teorema 3 (Teorema del coseno)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$