

Resumen Introducción al Cálculo

Matías Carvajal Pérez
Nicolás Fuenzalida Sáez

4 Secciones Cónicas

Definición 1 (Cónica) Sean D y F una recta y un punto del plano tales que $F \notin D$. Sea e un número positivo.

Una cónica es el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que su distancia a F es e -veces su distancia a la recta D .

Es decir:

$$P \in \text{Cónica} \iff d(P, F) = e \cdot d(P, D), \quad e > 0$$

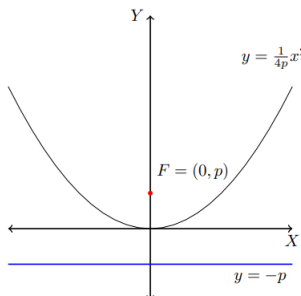
1. F es llamado **foco** de la cónica.
2. D es llamada **directriz** de la cónica.
3. e es llamada **excentricidad** de la cónica.
 - Si $e < 1$ la cónica se llamará **Elipse**.
 - Si $e = 1$ la cónica se llamará **Parábola**.
 - Si $e > 1$ la cónica se llamará **Hipérbola**.

4.1 Parábola

Definición 2 (Parábola) Una **parábola** corresponde al caso $e = 1$.

Para escribir su ecuación consideraremos que el foco está en la ubicación $F = (0, p)$ donde $p \neq 0$ y que la directriz D es la recta horizontal de ecuación $y = -p$. Con esto, el origen es un punto de la parábola ya que dista una distancia $|p|$ tanto de F como de D . Para escribir la ecuación de la parábola consideremos un punto $P = (x, y)$ cualquiera del plano e impongamos que su distancia a F y a D sean iguales:

$$P = (x, y) \in \text{Parábola} \iff y = \frac{1}{4p}x^2.$$



Ecuación general de la parábola

Teorema 1 La ecuación $y = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$ representa una parábola de eje vertical con directriz $D : y = \frac{-1-\Delta}{4a}$, foco $F = (\frac{-b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a})$ y vértice $V = (\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$, donde $\Delta = b^2 - 4ac$.

4.2 Elipse

Definición 3 La **elipse** corresponde al caso $e < 1$.

Para escribir su ecuación en forma simple, conviene ubicar el foco sobre el eje OX en las coordenadas $F = (f, 0)$, y la directriz vertical de ecuación $x = d$, donde $f \neq d$. Con esta elección, la ecuación de la elipse es

$$P = (x, y) \in \text{Elipse} \iff x^2(1-e^2) + 2x(e^2d-f) + y^2 = e^2d^2 - f^2.$$

Si en esta ecuación llamamos $f = e^2d$, $a = ed$ y $b = ed\sqrt{1-e^2}$, entonces obtenemos la **Ecuación general de la elipse**:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Donde

$$f = e^2d = ae, d = \frac{a}{e}.$$

En consecuencia:

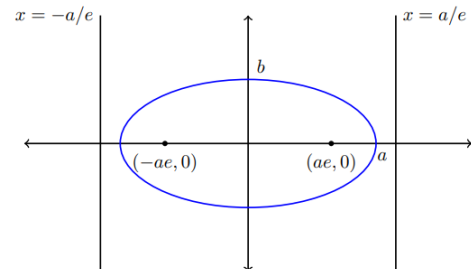
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ con } a > b,$$

corresponde siempre a una elipse con:

$$\text{Excentricidad: } e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

$$\text{Foco: } F = (ae, 0)$$

$$\text{Directriz: } D : x = \frac{a}{e}$$



Propiedad importante

Sea P un punto cualquiera de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y sean P' y P'' las proyecciones de P sobre las directrices. Entonces

$$PF + PF' = 2a.$$

4.3 Hipérbola

Definición 4 La **hipérbola** corresponde al caso $e > 1$.

Nuevamente, para escribir su ecuación en forma simple, conviene ubicar el foco sobre el eje OX en las coordenadas $F = (f, 0)$, y la directriz vertical de ecuación $x = d$, donde $f \neq d$. Con esta elección, la ecuación de la hipérbola es

$$P \in \text{Hipérbola} \iff -x^2(e^2 - 1) + 2x(e^2 d - f) + y^2 = e^2 d^2 - f^2.$$

Escogiendo $f = e^2 d$, $a = ed$ y $b = ed\sqrt{e^2 - 1}$, entonces tendremos

Definición 5 (Ecuación general de la hipérbola)

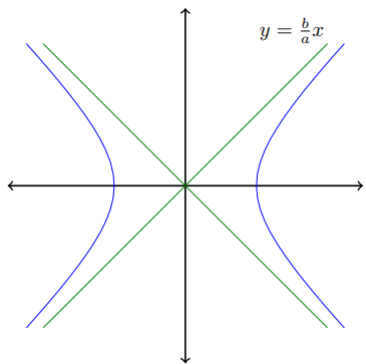
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Cuando $a > b$, corresponde siempre a una hipérbola con:

$$\text{Excentricidad: } e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

$$\text{Foco: } F = (ae, 0)$$

$$\text{Directriz: } D : x = \frac{a}{e}$$



Propiedad importante

Sea P un punto cualquiera de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ y sean P' y P'' las proyecciones de P sobre las directrices. Entonces

$$PF' - PF = 2a.$$

5 Funciones

Sean A y B dos conjuntos no vacíos de naturaleza arbitraria. Una función de A en B es una correspondencia entre los elementos de A y los elementos de B de tal modo que a cada $x \in A$ se le hace corresponder un y sólo un elemento $y \in B$.

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

5.1 Elementos básicos de una función

- A se llama **dominio** de la función.
- $B = \mathbb{R}$ se llama **codominio** de la función.
- $y = f(x)$ se llama **imagen** de x por f o variable dependiente.
- x se llama **variable** de la función o variable independiente.

5.2 Gráfico de una función

Definición 6 Llamaremos **Gráfico de una función** f al conjunto de puntos del plano G_f definido por:

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \text{Dom}(f) \wedge y = f(x)\}.$$

5.3 Ceros de una función

Definición 7 (Ceros de una función) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Llamaremos *ceros de f* a todos los reales de su dominio tales que $f(x) = 0$. En estos puntos el gráfico de f corta al eje OX .

Adicionalmente llamaremos *intersección con el eje Y* al punto de coordenadas $(0, f(0))$.

Definición 8 (Conjunto imagen) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Llamaremos conjunto Imagen de f al conjunto definido por

$$\text{Im}(f) = f(A) = \{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in A) \text{ de modo que } y = f(x)\}.$$

O sea

$$\text{Im}(f) = \{f(x) : x \in A\}.$$

5.4 Funciones pares e impares

Definición 9 (Función par) Diremos que $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una *función par* ssi

- $(\forall x \in A) -x \in A$.
- $(\forall x \in A) f(-x) = f(x)$.

Definición 10 (Función impar) Diremos que $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una *función impar* ssi

- $(\forall x \in A) -x \in A$.
- $(\forall x \in A) f(-x) = -f(x)$.

5.5 Funciones Periódicas

Definición 11 (Función periódica) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Diremos que f es *periódica* ssi existe $p \in \mathbb{R}^+$ tal que:

- $(\forall x \in A) x + p \in A$.
- $(\forall x \in A) f(x + p) = f(x)$.

En este caso p se llama *periodo* de la función.

Definición 12 (Periodo mínimo) Se llama *periodo mínimo* de la función f al real $\bar{p}$ tal que f es periódica de periodo $\bar{p}$, y si f es periódica de periodo p , entonces $p \geq \bar{p}$.

5.6 Funciones Monótonas

Definición 13 (Crecimiento de funciones) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, diremos que:

- f es *creciente* en $B \subseteq A$ ssi $\forall x_1, x_2 \in B, x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$
- f es *decreciente* en $B \subseteq A$ ssi $\forall x_1, x_2 \in B, x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$

Adicionalmente agregaremos la palabra estrictamente cuando las desigualdades anteriores se satisfacen en forma estricta.

Diremos que f es *monótona* si es o bien creciente o decreciente.

Definición 14 (Función acotada) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, diremos que

- f es *acotada inferiormente* ssi $(\exists a \in \mathbb{R})$ tal que $(\forall x \in \text{Dom}(f)) a \leq f(x)$
- f es *acotada superiormente* ssi $(\exists b \in \mathbb{R})$ tal que $(\forall x \in \text{Dom}(f)) f(x) \leq b$
- f es *acotada* ssi $(\exists a, b \in \mathbb{R})$ tales que $(\forall x \in \text{Dom}(f)) a \leq f(x) \leq b$

Proposición 1 f es acotada $\iff (\exists M \in \mathbb{R}^+)$ tal que $(\forall x \in \text{Dom}(f)), |f(x)| \leq M$.

Observación Si f es acotada superior o inferiormente y $B \subseteq \text{Dom}(f)$ entonces se pueden determinar las siguientes expresiones:

$$\min_{x \in B} f(x) = \min\{f(x) : x \in B\}$$

$$\max_{x \in B} f(x) = \max\{f(x) : x \in B\}$$

Definición 15 (Mínimo y máximo) Podemos decir que x_0 es *punto mínimo* de f si $x_0 \in \text{Dom}(f)$, y para todo $x \in \text{Dom}(f)$ se cumple que $f(x_0) \leq f(x)$. O, equivalentemente $f(x_0) = \min_{x \in \text{Dom}(f)} f(x)$.

De la misma manera, $x_0 \in \text{Dom}(f)$ es *punto máximo* de f si para todo $x \in \text{Dom}(f)$ se cumple que $f(x_0) \geq f(x)$. O, $f(x_0) = \max_{x \in \text{Dom}(f)} f(x)$.

5.7 Algunas funciones importantes

1. **La función constante** está definida por $f(x) = a$. Tiene $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y es una función par. Si $a = 0$ también es impar. Si $a \neq 0$ no tiene ceros, si $a = 0$ todos los reales son sus ceros.
2. **La función potencia natural** está definida por $f(x) = x^n$ donde $n \in \mathbb{N}$. Tiene $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. La función es par si n es par y la función es impar si n es impar.

3. **La función raíz enésima** está definida por $f(x) = \sqrt[n]{x}$ donde $n \in \mathbb{N}$. Si n es par entonces $\text{Dom}(f) = [0, \infty)$, si n es impar entonces $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. La función es impar si n es impar.

4. **La función cajón o parte entera** está definida por $f(x) = [x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$. Tiene $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\text{Im}(f) = \mathbb{Z}$. Sus ceros son todos los reales en el intervalo $[0, 1)$ y es una función creciente.

5. **La función opuesta**, sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, llamaremos función opuesta de f a la función $(-f)$ definida por:

$$-f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } (\forall x \in A)(-f)(x) = -(f(x))$$

6. **Módulo de una función**, sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, llamaremos función módulo de f a la función $|f|$ definida por:

$$|f| : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } (\forall x \in A)$$

$$|f|(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

7. **Restricción de una función**, sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función y sea $B \subseteq A$. Se llama restricción de f a B a la función $f|_B$ definida por:

$$f|_B : B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } (\forall x \in B)f|_B(x) = f(x).$$

5.8 Álgebra de funciones

Sean f y g dos funciones de dominio D_f y D_g respectivamente y sea $\lambda \in \mathbb{R}$ una constante fija. Definimos las funciones suma, diferencia, ponderación, producto y cociente por:

Definición 16 1. Función suma

$$f+g : D_f \cap D_g \rightarrow \mathbb{R}, (\forall x \in D_f \cap D_g)(f+g)(x) = f(x)+g(x)$$

2. Función diferencia $f-g = f+(-g)$

$$f-g : D_f \cap D_g \rightarrow \mathbb{R}, (\forall x \in D_f \cap D_g)(f-g)(x) = f(x)-g(x)$$

3. Ponderación de una función

$$\lambda f : D_f \rightarrow \mathbb{R}, (\forall x \in D_f)(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

4. Función producto

$$f \cdot g : D_f \cap D_g \rightarrow \mathbb{R}, (\forall x \in D_f \cap D_g)(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

5. Función cociente

$$\frac{f}{g} : A \rightarrow \mathbb{R}, (\forall x \in A) \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\text{donde } A = D_f \cap D_g \setminus \{x \in D_g : g(x) = 0\}.$$

5.9 Otras funciones importantes

Definición 17 (Funciones polinómicas) Son de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ son constantes reales.

Estas funciones tienen siempre $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. n se llama el grado.

Definición 18 (Funciones racionales) Son de la forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}.$$

Donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinómicas.

El dominio de estas funciones es $\mathbb{R}$ salvo los puntos donde la función Q se anula, es decir:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : Q(x) = 0\}.$$

5.10 Asíntotas de una función racional

Definición 19 (Asíntotas verticales) Sea

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}.$$

Si $x_1, x_2, \dots, x_r$ son todas las raíces del denominador, es decir, de la función $Q(x)$ pero no del numerador, o sea, de la función $P(x)$, entonces las rectas $x = x_1, x = x_2, \dots, x = x_r$ se llaman **asíntotas verticales** de la función $f(x)$ y se caracterizan por que para valores de x cercanos a dichos puntos la función crece o decrece sin cotas.

Definición 20 (Asíntota horizontal) Sea

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}.$$

Si $n = m$ la recta $y = \frac{a_m}{b_m}$ se llama **asíntota horizontal** de la función f y se caracteriza por que para valores de x muy grandes o muy negativos los valores de $f(x)$ se aproximan a dicha recta.

Si $n < m$ la asíntota horizontal es $y = 0$.

5.11 Composición de funciones

Definiremos la composición simplemente mediante la ley, como se hace frecuentemente con las funciones reales de variable real, es decir

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

de modo que el dominio será

$$\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \text{Dom}(f) : f(x) \in \text{Dom}(g)\}.$$

5.12 Funciones invertibles

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{Cod}(f)$.

- Diremos que f es **inyectiva** ssi $[f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2]$, o equivalentemente $[x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)]$.
- Diremos que f es **epiyectiva** ssi $\text{Im}(f) = \text{Cod}(f)$.
- Diremos que f es **biyectiva** ssi f es inyectiva y epiyectiva.

Definición 21 (Función inversa) Sea $f : \text{Dom}(f) \rightarrow \text{Cod}(f)$ una función biyectiva. Se define la función inversa de f como la función f^{-1} definida por:

$$f^{-1} : \text{Cod}(f) \rightarrow \text{Dom}(f), [y = f^{-1}(x) \iff x = f(y)].$$