Resumen Introducción al Cálculo

Matías Carvajal Pérez
Nicolás Fuenzalida Sáez

1 Números Reales

1.1 Introducción

El conjunto de los números reales, denotado por $\mathbb{R}$, es un conjunto cuyos elementos se llaman números reales, en el cual se definen dos operaciones llamadas suma o adición y multiplicación o producto.

En este curso, todas las propiedades deben ser una consecuencia de ciertos postulados básicos elementales. Estos postulados básicos elementales se llaman axiomas y serán los pilares fundamentales de nuestra teoría. Las propiedades de $\mathbb{R}$ serán sólo aquellas que pueden ser deducidas, mediante una razonamiento lógico-matemático, a partir de los **axiomas**.

Agruparemos los axiomas en tres grupos: los axiomas de cuerpo (asociados a la igualdad), los axiomas de orden (asociados a la desigualdad) y el axioma del supremo (que marca la diferencia entre los reales y los racionales).

Juntando todos los axiomas que satisface $\mathbb{R}$, suele decirse, en pocas palabras que $\mathbb{R}$ es un Cuerpo Ordenado Completo y Arquimediano.

1.2 Axiomas de Cuerpo de los Reales

Los axiomas de $\mathbb{R}$ sobre la igualdad también son llamados axiomas de cuerpo de los reales.

Axioma 1 (Conmutatividad)

a) Cualesquiera que sean los reales x, y dados, su suma es un real y es independiente del orden en que se usen los dos sumandos, es decir:
$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \quad x + y = y + x.$$

b) Cualesquiera que sean los reales x, y dados, su producto es un real y es independiente del orden que se haga el producto, es decir:
$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \quad x \cdot y = y \cdot x.$$

Axioma 2 (Asociatividad)

a) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x + (y + z) = (x + y) + z$

b) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

Axioma 3 (Distributividad)

a) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x(y + z) = xy + xz$

b) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (x + y)z = xz + yz$

Axioma 4 a (Existencia de elemento neutro para la suma)

En $\mathbb{R}$ existen ciertos números denotados por la letra e que no afectan al resultado de la operación suma. Es decir,
$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x + e = x.$$
Todo elemento e que cumpla esta propiedad se dirá neutro para la suma.

Teorema 1 El elemento neutro para la suma es único.

Observación Una vez demostrado el teorema, podremos ponerle un nombre especial al único netro aditivo. Lo llamaremos "cero" y lo denotaremos 0.

Axioma 4 b (Existencia de elemento neutro para el producto)

En $\mathbb{R}$ existen ciertos números denotados por la letra e que, por un lado son diferentes de 0 y por otro no afectan en la operación producto. Es decir,
$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x \cdot e = x.$$
Todos los elementos e que cumplen esta propiedad se llaman neutros para el producto.

Teorema 2 El elemento neutro para el producto es único.

Observación

- Al único neutro para el producto lo llamaremos "uno" y lo denotaremos 1.
- El axioma dice además que $1 \neq 0$.

Axioma 5 (Existencia de elementos inversos)

a) Para cada $x \in \mathbb{R}$, existen reales asociados a x, que se llaman opuestos o inversos aditivos de x, que satisfacen:
$$x + \text{opuesto}(x) = 0.$$

b) Para cada $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$, existen inversos multiplicativos o recíprocos de x, que satisfacen:
$$x \cdot \text{recíproco}(x) = 1.$$

Teorema 3 1. Para todo $x \in \mathbb{R}$, el inverso aditivo es único.

2. Para todo $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$, el inverso multiplicativo es único.

Observación • Los inversos aditivos y multiplicativos de x se denotan simplemente por $-x$ y x^{-1}, respectivamente.

- Con los 5 axiomas enunciados anteriormente, se dice que $\mathbb{R}$ con las operaciones $+$ y $\cdot$ forma un Cuerpo, que denotaremos como $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

1.3 Propiedades en $\mathbb{R}$ relacionadas con la igualdad

Propiedad 1

$$\forall a \in \mathbb{R} \text{ se cumple } a \cdot 0 = 0.$$

Observación Una consecuencia importante de esta primera propiedad es que **no existe el inverso multiplicativo del cero**.

1.4 Otras propiedades en $\mathbb{R}$

Propiedad 2 En $\mathbb{R}$, las ecuaciones

a) $a + x = b$

b) $a \cdot x = b \quad (a \neq 0)$

tienen solución, y dicha solución es única.

1.5 Definiciones importantes

Definición 1 (Diferencia y cuociente)

- Llamaremos diferencia entre a y b al real $x = b + (-a)$ y se denota por $x = b - a$. Con esto, la propiedad anterior se resume en

$$a + x = b \text{ si y sólo si } x = b - a.$$

- El resultado de la ecuación (b) $x = b \cdot a^{-1}$ se denomina cuociente de b por a y se denota por la fracción $x = \frac{b}{a}$, o bien por el cuociente $x = b : a$. Luego si $a \neq 0$ se tiene que:

$$a \cdot x = b \text{ si y sólo si } x = \frac{b}{a}.$$

Observación De la unicidad de soluciones de estas ecuaciones se deducen varias variantes útiles en procesos algebraicos:

1. Ley de cancelación para la suma:

$$a + b = a + c \text{ entonces } b = c.$$

2. Ley de cancelación para el producto: cuando $a \neq 0$,

$$a \cdot b = a \cdot c \text{ entonces } b = c.$$

3. Resolución de la ecuación lineal general

$$a \cdot x + b = 0, \text{ donde } a \neq 0.$$

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Propiedad 3 (Regla de los inversos)

i) Para todo $a \in \mathbb{R} - (-a) = a$

ii) Para todo $a \in \mathbb{R}^* (a^{-1})^{-1} = a$, donde $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \backslash \{0\}$

Propiedad 4 (Reglas de los signos)

i) $a \cdot (-b) = -(a \cdot b) = -ab$

ii) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

iii) $-(a + b) = (-a) + (-b) = -a - b$

iv) Si $a, b \neq 0$ entonces $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$

v) $a - (b + c) = a - b - c$

vi) $a - (b - c) = a - b + c$

Propiedad 5 Para todo $x, y \in \mathbb{R}$

$$x \cdot y = 0 \Longrightarrow (x = 0) \vee (y = 0).$$

Propiedades adicionales

1. $\dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b} \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$, con $b, c \neq 0$
2. $\dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad \pm bc}{bd} \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, con $b, d \neq 0$
3. $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd} \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, con $b, d \neq 0$
4. $\dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bc} \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, con $b, c, d \neq 0$
5. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
6. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
7. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
8. $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
9. $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

2 Axiomas de Orden

2.1 Axiomas de Orden de los Reales

En $\mathbb{R}$ existe un subconjunto llamado conjunto de reales (estrictamente) positivos ($\mathbb{R}_+^*$), el cual satisface los siguientes axiomas o reglas.

Axioma 6 (de la tricotomía) Para todo $x \in \mathbb{R}$, una y solo una de las siguientes proposiciones es verdadera:

i) $x \in \mathbb{R}_+^*$

ii) $(-x) \in \mathbb{R}_+^*$

iii) $x = 0$

Axioma 7 (Clausura) Para todo $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ se cumple que:

i) $(x + y) \in \mathbb{R}_+^*$

ii) $x \cdot y \in \mathbb{R}_+^*$

Es decir, $\mathbb{R}_+^*$ es cerrado para la suma y el producto.

2.2 Relaciones de orden

Relaciones de orden Sean $x, y \in \mathbb{R}$ se definen las relaciones $<, >, \leq, \geq$, por:

1. $x < y \iff (y - x) \in \mathbb{R}_+^*$
2. $x > y \iff y < x \iff (x - y) \in \mathbb{R}_+^*$
3. $x \leq y \iff (x < y) \vee (x = y)$
4. $x \geq y \iff (x > y) \vee (x = y)$

2.3 Propiedades de la desigualdad

Propiedad 6 $x > 0 \iff x \in \mathbb{R}_+^*$

Propiedad 7 x es negativo $\iff x < 0$.

Propiedad 8 (tricotomía) Para cualquier par de números reales x e y, una y sólo una de las siguientes proposiciones es verdadera:

i) $x < y$

i) $x > y$

i) $x = y$

Propiedad 9 $x < y$ y $a \in \mathbb{R} \Longrightarrow x + a < y + a$.

Propiedad 10 i) $x < y \wedge a > 0 \Longrightarrow ax < ay$

ii) $x < y \wedge a < 0 \Longrightarrow ax > ay$

Propiedad 11 Para todo $x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.

Propiedad 12 Si $x < y$ y $u < v \Longrightarrow x + u < y + v$.

Propiedad 13 Si $0 < x < y$ y $0 < u < v$ entonces podemos multiplicar las desigualdades, es decir, $xu < yv$.

Propiedad 14 i) $(x < 0) \wedge (y > 0) \Longrightarrow xy < 0$

ii) $(x < 0) \wedge (y < 0) \Longrightarrow xy > 0$

i) $x > 0 \Longrightarrow x^{-1} > 0$

ii) $x < 0 \Longrightarrow x^{-1} < 0$

Propiedad 15 Si $0 < x < y$ entonces $x^{-1} > y^{-1}$.

2.4 Gráfico de subconjuntos de $\mathbb{R}$

Definición 2 (Intervalos) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq b$. Los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ se llamarán intervalos:

1. Intervalo abierto a coma b:
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$
2. Intervalo cerrado a coma b:
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$
3. Intervalo a coma b cerrado por la derecha y abierto por la izquierda:
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$
4. Intervalo a coma b cerrado por la izquierda y abierto por la derecha:
$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$
5. Intervalos no acotados:
$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$$
$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$$
$$[a, +\infty] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$$
$$(a, +\infty] = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$$

Notación. Para denotar un intervalo abierto (a, b) también se puede ocupar los paréntesis $]a, b[$.

Observación 1. Si $a = b$ entonces $(a, a) = (a, a] = [a, a) = \emptyset$ y $[a, a] = \{a\}$.

2. Se puede anotar al conjunto $\mathbb{R}$ como el intervalo no acotado $(-\infty, +\infty)$.
3. Sea I un intervalo y $x_1, x_2 \in I$, tales que $x_1 \leq x_2$, entonces $[x_1, x_2] \subseteq I$.

2.5 Inecuaciones

Inecuaciones de primer grado

Son de la forma $ax + b < 0$ donde a y b son números reales constantes y $a \neq 0$. Donde el signo $<$ puede ser también $>, \leq$ o $\geq$.

Solución
$$ax + b < 0 \iff ax < -b.$$

i) Si $a > 0$ entonces la inecuación queda $x < -\frac{b}{a}$ cuya solución evidentemente es $x \in (-\infty, -\frac{b}{a})$.

ii) Si $a < 0$ entonces la inecuación queda $x > -\frac{b}{a}$ cuya solución evidentemente es $x \in (-\frac{b}{a}, \infty)$.

Inecuaciones de grado mayor a 1

Enunciaremos un método para resolver algunas inecuaciones del tipo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0,$$

donde el signo $<$ puede ser también $>, \leq$ o $\geq$.

Nos remitiremos primeramente a los casos cuando $P(x)$ y $Q(x)$ son productos de factores de primer orden del tipo $ax + b$. Comencemos por observar que este tipo de factores cambia de signo en el punto $x = -\frac{b}{a}$. Denominaremos **puntos críticos** a estos valores.

El método para resolver estas inecuaciones es en consecuencia el siguiente:

1. Determinar todos los puntos críticos mediante la ecuación $x = -\frac{b}{a}$.
2. Ordenar los puntos críticos de menos a mayor y formar los intervalos abiertos encerrados entre ellos más los dos intervalos no acotados correspondientes.
3. Analizar el signo de la expresión $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en los intervalos encontrados en (2.) y escoger aquellos que resuelvan de buen modo la inecuación.
4. En los casos en que los signos de la inecuación sean $\leq$ o $\geq$ deben agregarse a la solución los puntos críticos del numerador, ya que en esos puntos se anula la fracción.

Factorización de términos cuadráticos

Si la inecuación no aparece factorizada por factores de primer grado, se puede intentar factorizar la expresión, o bien intentar conocer (sin factorizar) los puntos donde estos factores cambian de signo. En este último caso, se puede resolver la inecuación con el método indicado anteriormente.

Para los factores de segundo grado, $ax^2 + bx + c$, llamemos $\triangle$ al factor $b^2 - 4ac$. Dependiendo del signo de $\triangle$ se tienen tres posibilidades:

1. Si $\triangle > 0$ entonces los puntos críticos son $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\triangle}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\triangle}}{2a}$, luego
   - ax^2+bx+c tiene el signo de a si $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$.
   - $ax^2 + bx + c$ tiene el signo de $-a$ si $x \in (x_1, x_2)$.
2. Si $\triangle = 0$ entonces solo hay un punto crítico que es $x^* = -\frac{b}{2a}$ y se tiene que $ax^2 + bx + c$ tiene el signo de a si $x \in (-\infty, x^*) \cup (x^*, \infty)$.
3. Si $\triangle < 0$, entonces no hay puntos críticos y en este caso $ax^2 + bx + c$ tiene el signo de a para todo $x \in \mathbb{R}$.

2.6 Módulo o valor absoluto

Definición 3 (Módulo o valor absoluto) Sea $x \in \mathbb{R}$, llamaremos módulo de x al real definido por:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Propiedad 16

1. $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
2. $|x| = 0 \iff x = 0$
3. $|x| = |-x|$
4. $|x^2| = |x|^2 = x^2$
5. $-|x| \leq x \leq |x|$
6. $|xy| = |x| \cdot |y|$
7. $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$
8. $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a \iff x \in [-a, a]$
9. $|x| \geq a \iff x \leq -a \vee a \leq x \iff x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$
10. $|x - x_0| \leq a \iff x_0 - a \leq x \leq x_0 + a \iff x \in [x_0 - a, x_0 + a]$
11. $|x - x_0| \geq a \iff x \leq x_0 - a \vee x \geq x_0 + a \iff x \in (-\infty, x_0 - a] \cup [x_0 + a, \infty)$
12. [Desigualdad triangular] $(\forall x, y \in \mathbb{R})$ $|x + y| \leq |x| + |y|$

3 Geometría Analítica

3.1 Sistema de coordenadas cartesianas

La recta horizontal OX se suele llamar eje de las x, o eje de las abscisas. La recta vertical OY se llama o eje de las y, o eje de las ordenadas. El sistema de Coordenadas cartesianas también sirve para representar conjuntos de puntos. En general, estos conjuntos se anotan por expresiones del tipo

$$A = \{\text{todos los puntos de coordenadas } (x, y)$$

$$\text{tales que pertenecen a } C\},$$

donde la letra C denota alguna condición que satisfacen dichas coordenadas.

Los siguientes conjuntos se llaman Cuadrantes del sistema de coordenadas:

$$\text{1er. Cuadrante} = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$$

$$\text{2do. Cuadrante} = \{(x, y) : x < 0, y > 0\}$$

$$\text{3er. Cuadrante} = \{(x, y) : x < 0, y < 0\}$$

$$\text{4to. Cuadrante} = \{(x, y) : x > 0, y < 0\}$$

Lugares Geométricos

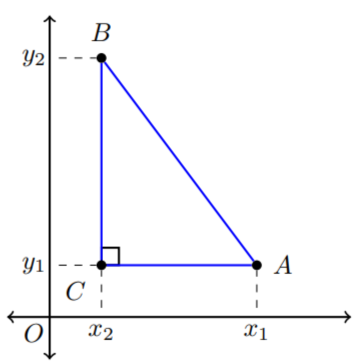
Definición 4 (Lugar Geométrico) En este contexto, a los conjuntos de puntos del plano que satisfacen alguna condición geométrica o algebraica, los llamaremos *Lugares Geométricos*.

3.2 Distancia entre dos puntos y Pitágoras

Dados dos puntos del plano $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$. Sea C el punto de coordenadas (x_2, y_1).

Definición 5 (Distancia entre dos puntos)

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



3.3 Teorema de Pitágoras

El $\triangle ACB$ es rectángulo en C. Por teorema de Pitágoras se cumple que:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

3.4 Circunferencia

Sean $A = (a, b)$ un punto fijo conocido del plano y r un número real conocido mayor que 0. Una circunferencia con centro en el punto A y radio r, es el conjunto de todos los puntos (x, y) del plano tales que su distancia al punto A vale r, es decir:

$$\mathcal{C} = \{P = (x, y) : d(P, A) = r\},$$

Por lo tanto la ecuación de una circunferencia con centro en el punto (a, b) y de radio r será:

Definición 6 (Ecuación de la circunferencia)

$$\mathcal{C} : (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

3.5 Recta

Ecuación de la recta

La condición necesaria y suficiente para que un punto $P = (x, y)$ esté sobre la recta L que pasa por $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ es

$$P = (x, y) \in \mathcal{L} \iff (x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1).$$

Ecuación general de la recta

Si escribimos $a = (y_2 - y_1)$, $b = -(x_2 - x_1)$, $c = (x_2 y_1 - x_1 y_2)$, la ecuación de cualquier recta puede escribirse de la forma:

Definición 7 (Ecuación general de la recta)

$$\mathcal{L} : ax + by + c = 0.$$

Teorema 4 El conjunto solución de la ecuación $ax + by + c = 0$ es:

i) El conjunto vacío si $a = 0, b = 0, c \neq 0$.

ii) Todo el plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si $a = b = c = 0$.

iii) Una recta vertical si $a \neq 0$ y $b = 0$.

iv) Una recta horizontal si $a = 0$ y $b \neq 0$.

v) Una recta oblicua (inclinada) si $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

Proposición 1 Sea $\mathcal{L} : ax + by + c = 0$ una recta donde $b \neq 0$ (es decir, no vertical). Si $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ son dos puntos cualesquiera de la recta $\mathcal{L}$, distintos entre sí, entonces el cuociente $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ es independiente de las coordenadas de los puntos A y B, y vale $\dfrac{a}{b}$.

Definición 8 (Pendiente de una recta) Sea $\mathcal{L}$ una recta no vertical. Si $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ son dos puntos diferentes de $\mathcal{L}$, entonces al real $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, se le llama *pendiente* de la recta $\mathcal{L}$.

Ecuación de la recta, punto-pendiente

Sea $\mathcal{L}$ la recta de pendiente m y que pasa por $A = (x_0, y_0)$.

Definición 9 (Ecuación de la recta, punto pendiente)

$$\mathcal{L} : (y - y_0) = m(x - x_0).$$

Ecuación de la recta dados dos puntos

Sea $\mathcal{L}$ la recta que pasa por $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$.

Definición 10 (Ecuación de la recta dados dos puntos)

$$\mathcal{L} : (y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Ecuación principal de la recta

Sea $\mathcal{L} : ax + by + c = 0$ una recta no vertical ($b \neq 0$).

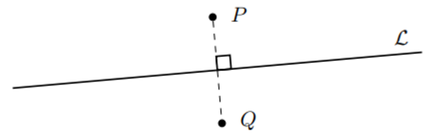
Definición 11 (Ecuación principal de la recta)

$$\mathcal{L} : y = mx + n.$$

Paralelismo y perpendicularidad

Definición 12 (Simetral) Dados dos puntos $P, Q \in \mathbb{R}^2$ distintos, llamamos Simetral de P y Q, a la recta $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^2$ que satisface

$$(x, y) \in \mathcal{L} \Longleftrightarrow d(P, (x, y)) = d(Q, (x, y)).$$



Definición 13 (Paralelismo) Dos rectas L y L' son paralelas (denotado $L \parallel L'$) si $L = L'$ o bien $L \cap L' = \emptyset$.

Definición 14 (Perpendicularidad) Dos rectas L y L' son perpendiculares u ortogonales (denotado $L \perp L'$), si para todo par de puntos P y Q en L, $P \neq Q$, la simetral entre P y Q es paralela a L'.

Proposición 2 Sean L y L' dos rectas. Entonces $L \perp L'$ si y sólo si una de las siguientes condiciones se satisface.

- L es horizontal y L' es vertical.
- L es vertical y L' es horizontal.
- L y L' son oblicuas con pendientes m_L y $m_{L'}$ respectivamente y $m_L \cdot m_{L'} = -1$.