Auxiliar Examen

P1 a) Usando la caracterización ε-δ

PDQ $\lim_{x\to 4} \sqrt{2x+1} = 3 \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon>0 \exists \delta>0, x \in Dom, |x-4| \le \delta \Rightarrow |\sqrt{2x+1} - 3| \le \varepsilon$

$x > -\frac{1}{2}$ bien definida

Tomemo lo que queremos $|\sqrt{2x+1} - 3|$

y buscamos $|x-4|$ que es nuestra hipótesis

$$\left|(\sqrt{2x+1} - 3)\frac{(\sqrt{\ } + 3)}{(\sqrt{\ } + 3)}\right| = \frac{|2x+1-9|}{|\sqrt{2x+1} + 3|} = \frac{2|x-4|}{\underbrace{|\sqrt{2x+1} + 3|}_{\text{me molesta porque depende de } x}}$$

1

lo encontramos

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario

Podemos imponer $|x-4| < 1 = \delta_1$ (arbitrario lo impongo)

Porque luego como vimos en el aux 19

Voy a tomar el mínimo de los δ

con $|x-4| < 1 \Rightarrow -1 < x-4 < 1 \quad / +4$

$\Rightarrow \quad 3 < x < 5 \quad / \cdot 2$

$6 < 2x < 10 \quad / +1$

$7 < 2x+1 < 11 \quad / \sqrt{*} \qquad * > 0$

$\Rightarrow \sqrt{7} < \sqrt{2x+1} < \sqrt{11} \quad / +3$

$\Rightarrow \sqrt{7} + 3 < \sqrt{2x+1} + 3 < \sqrt{11} + 3$

Con esto hay cota fija para $\sqrt{2x+1}+3$

luego si:

$$\left|\sqrt{2x+1}-3\right| = \underbrace{\frac{2|x-4|}{\left|\sqrt{2x+1}+3\right|} \leq \frac{2|x-4|}{\sqrt{7}+3}}_{*} \leq \frac{2\delta_2}{\sqrt{7}+3}$$

$$\Rightarrow \delta_2 = \frac{(\sqrt{7}+3)\varepsilon}{2}$$

Basta $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

Si $|x-4| < \delta$

$$= \left|\sqrt{2x+1}-3\right| = \frac{2|x-4|}{\sqrt{2x+1}+3} < \frac{2|x-4|}{\sqrt{7}+3} < \varepsilon$$

$*$

Solucion pauta $x > -\frac{1}{2}$, dado $|x-4| < \delta$

$$\Rightarrow \left|\sqrt{2x+1}-3\right| = \frac{2|x-4|}{\sqrt{2x+1}+3} \leq \frac{2\delta}{3} \Rightarrow \text{basta } \delta = \frac{3}{2}\varepsilon$$

P1 b

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{x-1}$$

límite conocido de la exponencial. $\frac{e^u - 1}{u} \xrightarrow{x\to 0} 1$

Hay que armar el $u \to 0$ | si $u = x-1$ $\Rightarrow u+1 = x$

$\Rightarrow u = x-1$ si $x \to 1 \Rightarrow u \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{x-1} = \lim_{u\to 0} \frac{e^{u+1} - e}{u+1-1} = \lim_{u\to 0} e\frac{(e^u - 1)}{u}$$

$$= e \lim_{u\to 0} \cancel{\frac{e^u - 1}{u}}^{\,1}$$

$$= e \cdot 1$$

b) $\lim_{n\to\infty} n\left(\exp\left(\frac{n+1}{n}\right) - e\right)$; usando $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$

$\exp(x) = e^x$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{1+\frac{1}{n}} - e}{1/n} \quad , \quad u = \frac{1}{n}$$

$\Rightarrow u \to 0$ si $n \to +\infty$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{e^{1+u} - e}{u} = e \text{ por parte anterior}$$

P2) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(|\alpha x|) - |\beta x|}{x}$, $\alpha > \beta > 0$

Veamos lim laterales

Si $\alpha > \beta > 0 \Rightarrow$ Si $x \to 0^+ \Rightarrow \alpha x > 0$
$\beta x > 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(|\alpha x|) - |\beta x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{x}\cdot\frac{\alpha}{\alpha} - \frac{\beta \cancel{x}}{\cancel{x}}$$

$u = \alpha x$
$u \to 0$
si $x \to 0^+$

$$= \lim_{u\to 0^+} \alpha \frac{\operatorname{sen}(u)}{u} - \beta = \alpha \cdot 1 - \beta$$

$\beta x < 0 \wedge \alpha x < 0$ si $x \to 0^-$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(|\alpha x|) - |\beta x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(-\alpha x)}{x}\cdot\frac{(-\alpha)}{(-\alpha)} + \frac{\beta \cancel{x}}{\cancel{x}}$$

$u = -\alpha x$
$u \to 0$
si $x \to 0^-$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen}(u)}{u}\cdot(-\alpha) + \beta = -\alpha \cdot 1 + \beta$$

$$\neq \alpha - \beta$$

Pues $\alpha > \beta > 0 \Rightarrow$ lim no existe

pues sus laterales son diferentes.

Este argumento es recordando el concepto de que el limite Existe si y solo si los limites laterales son iguales.

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = l \iff \lim_{x \to x^+} f(x) = l \wedge \lim_{x \to x^-} f(x) = l$$

P2) b) i) $$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(ax)}{e^{bx^2}-1} = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(ax)}{a^2x^2} \cdot \frac{a^2x^2}{e^{bx^2}-1}$$ ①

$$= \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{1-\cos(ax)}{(ax)^2}}_{(*)} \cdot \frac{a^2}{\underbrace{\left(\frac{e^{bx^2}-1}{bx^2}\right)}_{(**)} \cdot b}$$

C.V

Veamos si $x \to 0 \Rightarrow ax = u$

$u \to 0 \Rightarrow \frac{1-\cos(u)}{u^2} \to \frac{1}{2}$ $(*)$

Veamos C.V

Si $x \to 0$ $\quad \bar{u} = bx^2$

$\bar{u} \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^{bx^2}-1}{bx^2} = \lim_{\bar{u}\to 0} \frac{e^{u}-1}{u} = 1 \quad (**)$$

Como $(*)$ y $(**)$ existen se puede usar álg de límites convergentes además a y b son constantes

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(ax)}{(ax)^2} \cdot \frac{a^2}{\left(\frac{e^{bx^2}-1}{bx^2}\right) b} = \frac{a^2}{2b}.$$

($\frac{1-\cos(ax)}{(ax)^2} \to \frac{1}{2}$, $\left(\frac{e^{bx^2}-1}{bx^2}\right) b \to 1 \cdot b$)

ii) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{x^3-x^4}{\ln(x^5)}$ $\qquad$ Recordemos $\displaystyle \lim_{u\to 1} \frac{\ln(u)}{u-1} = 1$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-x^3}{5\frac{\ln(x)}{x-1}} = \frac{-1}{5}$$

($x^3 \to 1$, $\frac{\ln(x)}{x-1} \to 1$)

P2) Asíntota a $-\infty$

$f(x) = x \,\mathrm{senh}\left(a + \frac{1}{x}\right)$ sabemos

$$\mathrm{senh} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Veamos oblicua es recta $y = mx + n$

Encontremos m y n

$$m := \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x} \,\mathrm{senh}\left(a + \frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \mathrm{senh}\left(a + \frac{1}{x}\right)$$

Podemos introducir el límite? según apunte

no! porque solo es permitido para exp, ln sen y cos, pero $\mathrm{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}e^x - \frac{e^{-x}}{2}$

luego senh es alg y composición

de e^x que es continua,

luego $\frac{e^x}{2}$ cont y $\frac{e^{-x}}{2}$ cont

$$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \operatorname{senh}\left(a + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{a+\frac{1}{x}} - e^{-a-\frac{1}{x}}}{2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^a}{2} \cancelto{1}{e^{\frac{1}{x}}} - \frac{e^{-a}}{2\cancelto{1}{e^{\frac{1}{x}}}}$$

$$m = \frac{e^a - e^{-a}}{2} = \operatorname{senh}(a) \;//$$

Veamos ahora

$$n := \lim_{x \to -\infty} f(x) - m \cdot x = \lim_{x \to -\infty} x \sinh\left(a + \frac{1}{x}\right) - \operatorname{senh}(a) \cdot x$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(\sinh\left(a + \frac{1}{x}\right) - \sinh(a)\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{a} e^{\frac{1}{x}} - e^{-a} e^{-\frac{1}{x}} - e^{a} + e^{-a}}{2 \frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{a}}{2} \frac{[e^{\frac{1}{x}} - 1]}{1/x} - \frac{e^{-a}}{2} \frac{[e^{-\frac{1}{x}} - 1]}{-(-\frac{1}{x})} = \frac{e^{a}}{2} \cdot 1 - \frac{e^{-a}}{2(-1)} \cdot 1$$

$u = \frac{1}{x}$, $x \to -\infty$ $\Rightarrow u \to 0$ | $\bar{u} = \frac{-1}{x}$, $x \to -\infty$, $\bar{u} \to 0$

$$= \frac{e^{a} + e^{-a}}{2} = \cosh(a)$$

alg lím convergente

$$y = \operatorname{senh}(a) x + \cosh(a)$$

P3| Dado $a_0 > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \ln(a_n + 1)$

a) Inducción a_n bien definida.

PDQ| $a_n > 0$

CB| $a_0 > 0$ ✓ Enunciado

HI| Asumo SPG, que para algún $n \in \mathbb{N}$ $a_n > 0$

PI| PDQ| $a_{n+1} > 0$

Por definición $a_{n+1} = \ln(a_n + 1) > \ln(1)$
$ \overset{\shortparallel}{0}$

$\Rightarrow a_{n+1} > 0$ ✓

Esto es porque $a_n > 0$ y $\ln$ creciente

b) PDQ Decreciente

Basta $a_{n+1} = \ln(a_n+1) \underbrace{\le a_n + 1 - 1}_{\text{desigualdad del } \ln(x) \le x-1 \,,\ \forall x>0} = a_n$

$\Rightarrow a_{n+1} \le a_n$

$\Rightarrow a_n$ decreciente

y como $a_n > 0$ por parte a

$\Rightarrow$ Acotada.

Por TSM a_n converge.

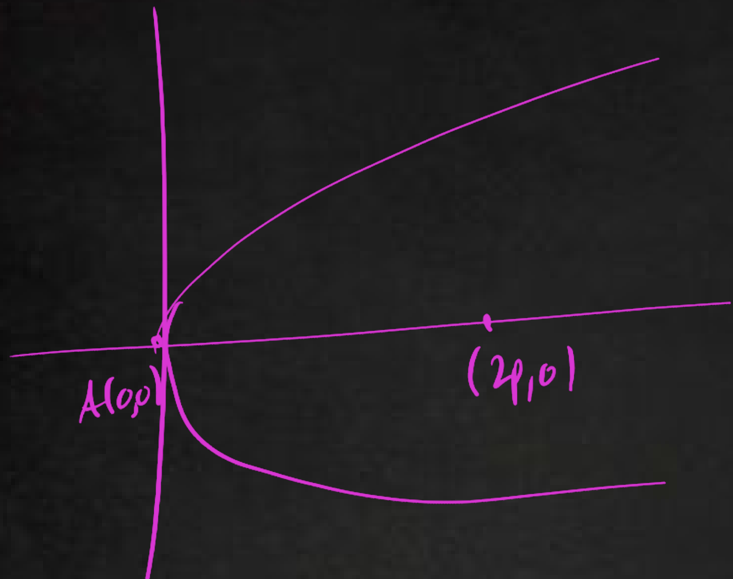
luego

$$a_{n+1} = \ln(a_n+1) \quad / \lim_{n\to+\infty}$$

$$l = \ln(l+1)$$

única solución $l = 0$.

P4) Dado $y^2 = 4px$, $p > 0$



a) ✓ la Asumimos

$L: y_0 y = 2p(x + x_0)$

b) PDQ) $d_B^2 - d_A^2 = 4p^2$.

Recordemos Dado $\bar{x} = (\alpha, \beta)$ y $L_1: ax + by + c = 0$
distancia de punto $\bar{x}$ a recta L_1

$$d_{\bar{x}}(L_1) = \frac{|\alpha a + \beta \cdot b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$A = (0,0)$ y recta tg $\underbrace{y_0}_{b} y \underbrace{-2p}_{a} x \underbrace{-2p x_0}_{c} = 0$

$$d_A(L) = \frac{|0 \cdot -2p + 0 \cdot y_0 + -2p x_0|}{\sqrt{(-2p)^2 + y_0^2}} = \frac{2p x_0}{\sqrt{4p^2 + y_0^2}}$$

$B = (2p, 0)$

$$d_B(L) = \frac{|2p \cdot (-2p) + 0 \cdot y_0 - 2p x_0|}{\sqrt{(-2p)^2 + y_0^2}} = \frac{4p^2 + 2p x_0}{\sqrt{4p^2 + y_0^2}}$$

Veamos: $d_B^2 - d_A^2$

$$= (d_B - d_A)(d_B + d_A)$$

$$= \left(\frac{4p^2 \cancel{+2px_0}}{\sqrt{4p^2+y_0^2}} \cancel{-} \frac{\cancel{2px_0}}{\sqrt{4p^2+y_0^2}}\right)\left(\frac{4p^2+2px_0}{\sqrt{4p^2+y_0^2}} + \frac{2px_0}{\sqrt{4p^2+y_0^2}}\right)$$

$$= \frac{4p^2(4p^2+4px_0)}{4p^2+y_0^2}$$

/ pGto $(x_0, y_0) \in$ Parábola

$\Rightarrow y^2 = 4px$

$\Rightarrow y_0^2 = 4px_0$ *

$$= \frac{4p^2\cancel{(4p^2+y_0^2)}}{\cancel{(4p^2+y_0^2)}}$$

$$= 4p^2 \; //$$

(*2 pts.*) Sea $f(x) = x^2 + x - 2$. Determine paridad, ceros, signos y gráfico de la función $g(x) = f(|x|)$.

Solución

g es par (por el módulo). Sólo la estudiamos en $x \geq 0$ y razonamos por simetría. Si $x \geq 0$
$g(x) = x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$ .... $\boxed{0.5 \text{ pto.}}$

Los ceros en $x \geq 0$ son $x = 1$ Luego en $\mathbb{R}$ son ± 1. .... $\boxed{0.5 \text{ pto.}}$

En $x \geq 0$ g es positiva para $x > 1$ y negativa en $[0, 1)$. Por lo tanto en $\mathbb{R}$, g es positiva en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y negativa en $(-1, 1)$. .... $\boxed{0.5 \text{ pto.}}$

El gráfico para $x \geq 0$ es el de la parábola vuelta hacia arriba que corta al eje OY en -2, corta al eje OX en 1. En $x \leq 0$ se copia por simetría. .... $\boxed{0.5 \text{ pto.}}$

(*2 pts.*) Considere los conjuntos $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x-1}{x} \leq 0\right\}$ y $B = \left\{\dfrac{k+1}{|k|} : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$
Determine, si es que existen, ínfimo, supremo, mínimo y máximo de A y B.

Solución

Claramente $A = (0, 1]$, luego $\max A = \sup A = 1$, $\inf A = 0$ y $\min A$ no existe. .... $\boxed{1.0 \text{ pto.}}$

$B = \left\{1 + \frac{1}{n}, -1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$ .... $\boxed{0.3 \text{ pto.}}$

Luego, $\max B = \sup B = 2$ .... $\boxed{0.3 \text{ pto.}}$

$\inf B = -1$, $\min B$ no existe. .... $\boxed{0.4 \text{ pto.}}$