MA1101-10 Introducción al Cálculo
Profesor: Doble P.
Auxiliar: Patricio Yáñez A.
Consultas: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 20 Examen

P1. a) **(3 pts.)** Usando la caracterización $\varepsilon - \delta$ del límite de funciones, demostrar que

$$\lim_{x\to 4} \sqrt{2x+1} = 3.$$

b) **(3 pts.)** Calcule los siguientes límites exponenciales:

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{x-1}, \qquad \lim_{n\to\infty} n\left(\exp\left(\frac{n+1}{n}\right) - e\right).$$

(Obs: Puede usar un límite para determinar el otro o los puede calcular por separado.)

P2. a) **(3 pts.)** Calcule los límites laterales y decida si existe o no el

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(|\alpha x|) - |\beta x|}{x}, \text{ donde } \alpha > \beta > 0.$$

b) Calcule los siguientes límites, indicando los límites auxiliares y cambios de variable (si corresponde) usados

i) **(1.5 pts)** $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(ax)}{e^{bx^2}-1}, \quad (a, b \neq 0).$

ii) **(1.5 pts)** $\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x^4}{\ln(x^5)}.$

P1) (2 pts.) Calcula, si existen, los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - 1}{\cos x - 1}$

b) $\lim_{x\to\infty} e^{-x^2}(1+x^2)$

P2) (2 pts.) Determina la asíntota oblicua hacia $-\infty$ de la función $f(x) = x\sinh(a+1)$.

P3) (3 pts.) Considera la secuencia $\{a_n\}$ definida por la recurrencia $a_0 > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \ln(a_n + 1)$.

a) Usando inducción, demuestra que la secuencia está bien definida $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Demuestra que la secuencia es decreciente.

c) Concluye que la secuencia es convergente, escribe la ecuación que satisface el límite y encuéntralo.

P4) (3 pts.) Considera la parábola $y^2 = 4px$ y los puntos $A(0,0)$, $B(2p,0)$ donde $p > 0$. Deja que $P(x_0, y_0)$ sea cualquier punto en la parábola, diferente del vértice, y deja que L sea la línea tangente a la parábola en P.

a) (1 pt.) Demuestra que L tiene la ecuación $y_0 y = 2p(x + x_0)$. Se da como hint pq usa otra materia

b) (2 pts.) Calcula las distancias d_A y d_B desde A y B a la línea L y demuestra que $d_B^2 - d_A^2 = 4p^2$.

Pista: La distancia desde (α, β) a la línea $ax + by + c = 0$ es $\frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.