P1] MA1001-2012 (P1 b)

Demuestre usando la definición.

I) $\lim_{x\to\infty} x^3 = +\infty$

Recordemos $\forall M>0, \exists m>0, \forall x \geq m, f(x) = x^3 \geq M$

Lo que no entrego	Lo que entrego
$f(x) = x^3 \leq M \quad / \sqrt[3]{\ }$	En efecto dado la definición
$\Rightarrow \quad x \leq \sqrt[3]{M} \to$ relación directa con x	basta tomar $\underbrace{m = \sqrt[3]{M}}_{\text{Existe}}, M>0$ $\forall M$
$\Rightarrow$ Si $\quad m = \sqrt[3]{M}$	Luego esto queda $\forall x \geq \sqrt[3]{M}$
	$x^3 \geq \left(\sqrt[3]{M}\right)^3 = M$
	$\Leftrightarrow f(x) \geq M$ ■

II) Demostrar $\lim_{x\to 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \nexists$

Sabemos que si el Límite existe es único

Sea $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$ $\quad x_n \to 0^+$

$$v_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, \quad n \in \mathbb{N} \quad v_n \to 0^+$$

Luego $\lim_{x\to 0^+} \sin\left(\frac{1}{1/2n\pi}\right) = \lim_{x\to 0^+} \sin\left(1/_{1/(2n\pi+\pi/2)}\right)$

cambia porque tiende $\quad \lim_{n\to\infty} \sin(2n\pi) = 0 \overset{?}{=} \lim_{n\to\infty} (2n\pi + \tfrac{\pi}{2}) = 1 \quad \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

III) $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{x-6}{2} = 1$

Lo primero es anotar la definición particularizada al caso que tenemos como $x \to 8$ y $\lim \% = 1$ es acotada en su límite y tendencia

Por lo que debemos usar ε-δ

$$\lim_{x \to 8} \frac{x-6}{2} = 1 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \overbrace{|x-8| < \delta}^{p} \Rightarrow \overbrace{\left|\frac{x-6}{2} - 1\right| < \varepsilon}^{q}$$

\# Demostraremos a través de encontrar la existencia de δ para cumplir con la condición de ε. arbitrario.

\# Tomaremos un lado de la implicancia y llegaremos al otro, este desarrollo debe ser a través de equivalencias. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow$ hipótesis $\Rightarrow$ tesis

\# Estudiaremos $q \Leftrightarrow \left| \dfrac{x-6}{2} - 1 \right| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{x-8}{2}\right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{|x-8|}{|2|} < \varepsilon \Leftrightarrow \underbrace{|x-8| < 2\varepsilon}_{\text{tengo la hipótesis.}}$$

\# El paso más Importante.

Lo que tengo $|x-8| < \delta$

Lo que quiero llegar $|x-8| < 2\varepsilon$

Así basta tomar $\delta = 2\varepsilon$ para tener lo pedido

PDQ !!

IV) $\left[\lim_{x\to 1} (2x^2 - 1) = 1\right] \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \, |x-1| < \delta \Rightarrow |2x^2 - 1 - 1| < \varepsilon$

Tenemos $|x-1| < \delta \Rightarrow |2x^2 - 2| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow 2|x+1||x-1| < \varepsilon$

En este caso tenemos parcialmente la hipótesis $|x-1| < \delta$, pero no puede depender δ de x ni de nada.

\# Supongamos $|x-1| < 1$ → arbitrario!!

$\Leftrightarrow -1 < x-1 < 1$ → no vacío y acotado =

$\Leftrightarrow 0 < x < 2$, $x \in (0,2) = A$, $\sup_{x\in A} A = 2$, $\inf_{x \in A} A = 0$.

$\Leftrightarrow 1 < x+1 < 3$, $(x+1) \in (1,3) = B$, $\sup_{x \in B} B = 3$, $\inf_{x\in B} B = 1$

Esta será una condición adicional que impondré.

luego $2\overbrace{|x+1|}^{\text{a lo más llega a 3, sup.}}|x-1|$ [redacted]

$\leq 2 \sup_{x\in B} B \cdot |x-1|$

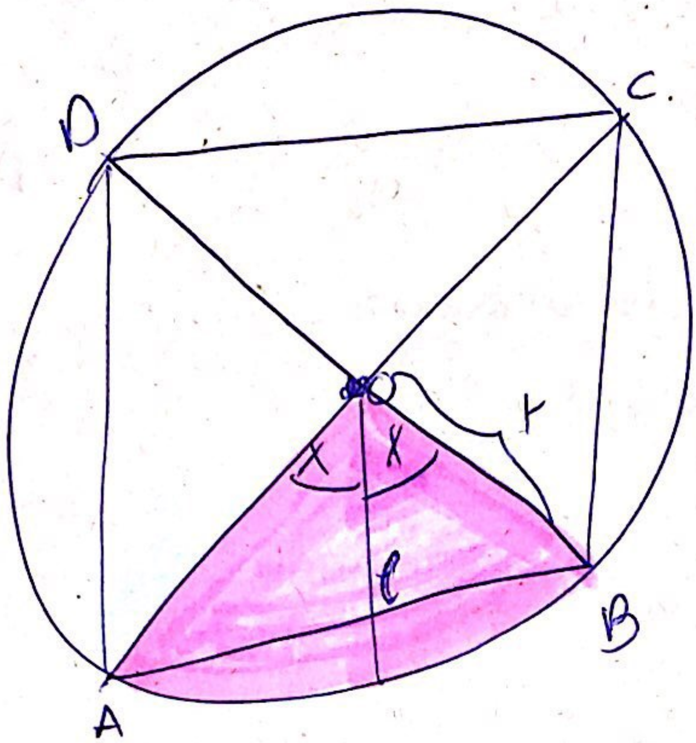
$= 2 \cdot 3 \, |x-1| < \varepsilon$

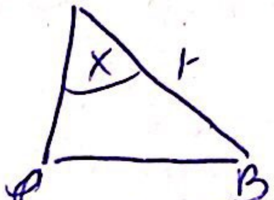
$\Leftrightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{6}$

De esta forma tenemos $|x-1| < \delta$ y queremos tener $|x-1| < \frac{\varepsilon}{6}$ $\Leftrightarrow |2x^2 - 2| < \varepsilon$

Para esto basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{6}$, pero en # supusimos algo, por lo que hay que tomarlo, luego $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{6}\}$. Así se cumplen ambos simultáneamente

P2) -





$\sin(x) = \dfrac{\overline{eB}}{r}$

A' ◁ AOB , fórmula general Área sector circular

$\frac{1}{2}\theta r^2$

$\Rightarrow \frac{1}{2} r^2 (2x) = A \triangleleft AOB$

$A' \square ABCD = AB \cdot BC = 4\,\sin(x)\cos(x)\, r^2$

$AB = 2\overline{eB} = 2\sin(x) \cdot r$

$BC = 2\overline{eO} = 2\cos(x) \cdot r$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{A \triangleleft AOB(x)}{A \square ABCD(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cancel{2}} \cancel{r^2} \cdot \cancel{2}x}{4\sin(x)\cos(x) \cdot \cancel{r^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left[\frac{\sin(x)}{x}\right]} \cdot \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{4} //$$

P3) $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{(1+e^x)(x^2-4)}$$

a) Primero debemos definir bien el dominio

$e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$0 \neq e^x + 1 > 1, \forall x \in \mathbb{R}$ Así que no causa problema.

$x^2 - 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$\Rightarrow A = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

Crecimiento: $x_1 < x_2$

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{(x_1^3 - 2x_1^2)}{(1+e^{x_1})(x_1^2-4)} - \frac{(x_2^3 - 2x_2^2)}{(1+e^{x_2})(x_2^2-4)}$$

Esta parte se omite pues no es lo que busca el ejercicio.

Signos $\dfrac{x^2(x-2)}{(1+e^x)(x^2-4)}$

	$-\infty$ a -2	-2 a 0	0 a 2	2 a ∞
x^2	+	+	+	+
$1+e^x$	+	+	+	+
$x-2$	−	−	−	+
$x-2$	−	−	−	+
$x+2$	−	+	+	+
	−	+	+	+

¿QUE OCURRE CON $X=-2$, $X=2$?

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2\cancel{(x-2)}}{(1+e^x)\cancel{(x-2)}(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2}{(1+e^x)(x+2)}$$

$$= \frac{\cancel{4}}{(1+e^2)\cdot\cancel{4}} = \frac{1}{e^2+1}$$

Como es un punto abierto no es Asíntota vertical.

$$\lim_{x\to -2^\pm} f(x) = \lim_{x\to -2^\pm} \frac{x^3-2x^2}{(1+e^x)(x-2)(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to -2^\pm} \frac{x^2}{(1+e^x)(x+2)} = \pm\infty$$

, por como se comporta x^2, $1+e^x$.

$X=-2$ Asíntota vertical.

ii) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2(x-2)}{(1+e^x)(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}^{\,0}}{\cancel{e^x}+1}\cdot\frac{x^2-\cancel{2x}^{\,1}}{\cancel{x^2}-4} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} e^x \gg \lim_{x\to\infty} x$$ | luego $y=0$ es A. H.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}^{\,-\infty}}{\cancel{e^x}+1}\cdot\frac{x^2-\cancel{2x}^{\,1}}{\cancel{x^2}-4} = -\infty$$, no es A. H.

iii) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = m$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x+1} \cdot \frac{x^2-2x}{x^2-4} = 1$$

$$n = \lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - mx \right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^x+1} \cdot \frac{x^2-2x}{x^2-4} - \overbrace{x \frac{(e^x+1)(x^2-4)}{(e^x+1)(x^2-4)}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3-2x^2+(-xe^x-x)(x^2-4)}{(e^x+1)(x^2-4)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x^3}-2x^2-x^3e^x+4xe^x-\cancel{x^3}+4x}{(e^x+1)(x^2-4)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{4x-2x^2}{(e^x+1)(x^2-4)} + \frac{e^x[4x-x^3]}{(e^x+1)(x^2-4)}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \underbrace{\frac{4x-2x^2}{(e^x+1)(x^2-4)}}_{\to -2} + \underbrace{\frac{e^x-x\cancel{(x^2-4)}}{(e^x+1)\cancel{(x^2-4)}}}_{\to 0} = \underline{-2} \,| = n$$

$y = x-2$ Oblicua.