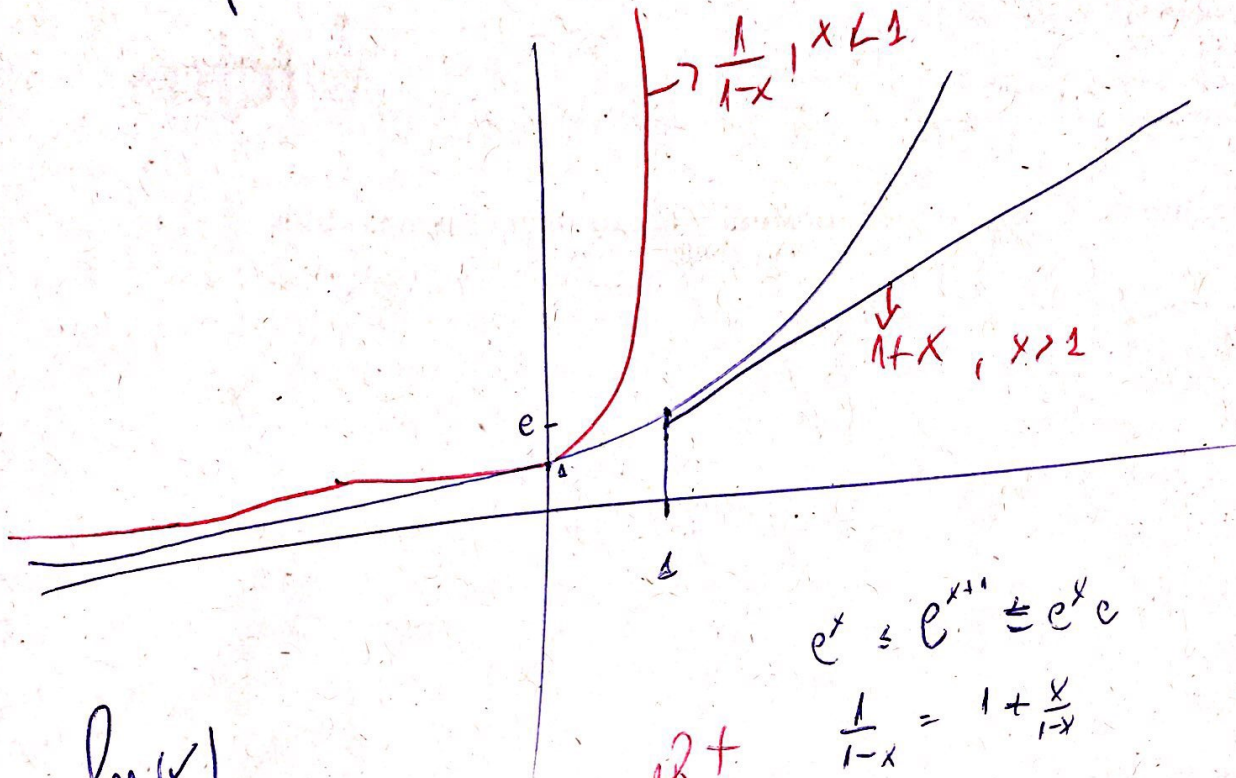
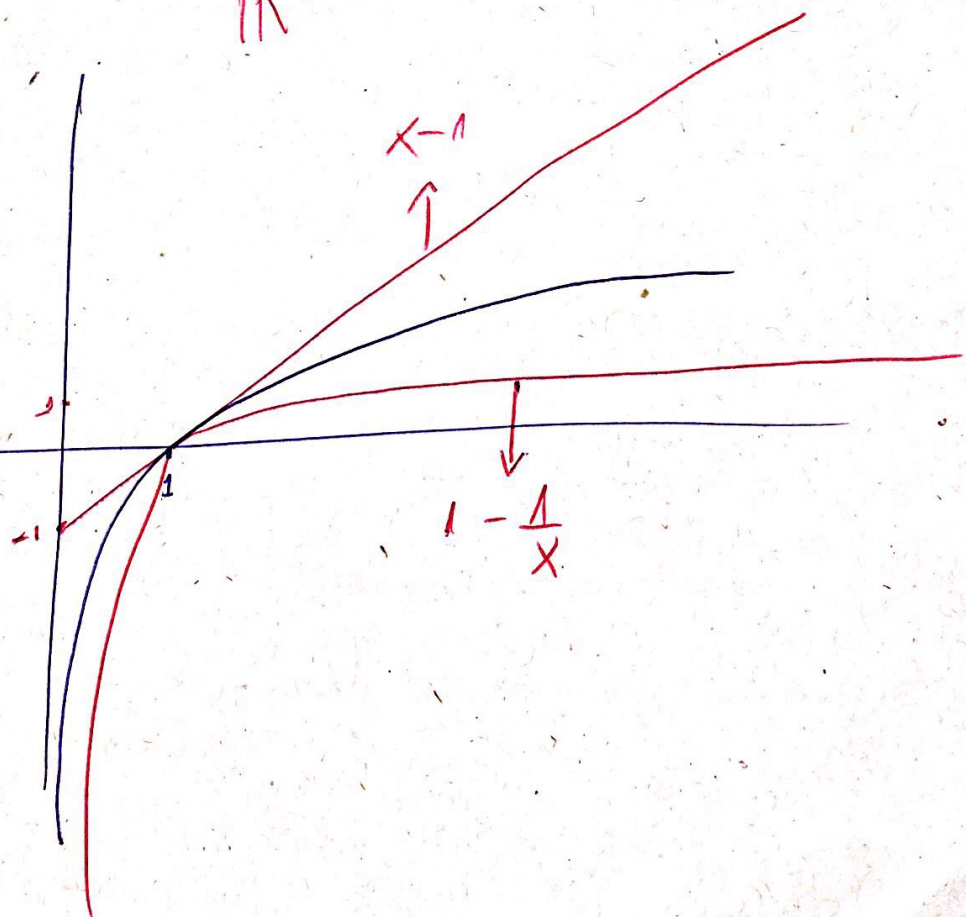


Exp



ln(x)



Teorema Bernoulli I.

$$I) (\forall m \in \mathbb{N}) (\forall h > -1) (1+h)^m \geq 1+mh.$$

Sucesión importante.

$$(q^m), 1) \lim q^m = 1, \text{ si } q = 1$$

$$2) \lim q^m = 0, \text{ si } |q| < 1$$

$$3) \lim q^m \text{ no existe si } q \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

$$(\sqrt[m]{a}), a \in (0, \infty)$$

$$\sqrt[m]{a} \rightarrow 1, \forall a \in (0, \infty).$$

Bernoulli II

$$II) (\forall m \in \mathbb{N}) (\forall h > 0) (1+h)^m \geq 1+mh + \frac{m(m-1)}{2} h^2$$

$$\sqrt[m]{m} \rightarrow 0$$

$$III) (\forall m \in \mathbb{N}) (\forall u \in (-1, \frac{1}{n})) (1+u)^m \leq \frac{1}{1-mu}$$

TEOREMA S

Def: Sea (S_m) , si $\forall m \geq m_0$ $S_{m+1} \geq S_m$ creciente.

- Sea (S_m) , si $\forall m \geq m_0, S_{m+1} \leq S_m$ decreciente.

TSM

Si (S_m) es sucesión (estrictamente) creciente o decreciente a partir de m_0 y acotada superiormente o inferiormente respectivamente, entonces converge.

Límite conocido $1) e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Teorema $\forall x \in \mathbb{R}$ la sucesión

$$S_m := \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \text{ converge.}$$

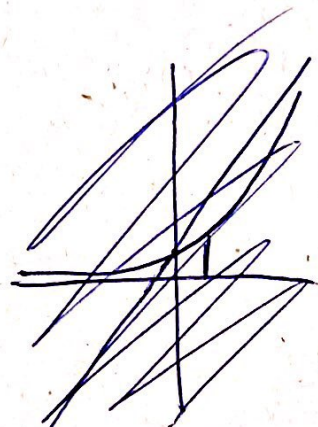
la función exponencial:

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x$$

$$\forall x < 1, e^x \leq \frac{1}{1-x}$$

Very Important.

$$\Rightarrow \underline{1+x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}, \forall x \in (-1, 1)}$$



la función logaritmo:

$$\forall x \in (0, \infty) \quad 1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$$

• Para $a > 0$

$$a^x = e^{(x \ln(a))}$$

$$\# \log_a x = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

exponencial y su continuidad.

$$\ln e^{a_m} \rightarrow e^a$$

$$\# \ln \left(\frac{e^{a_m} - e^a}{a_m - a} \right) \rightarrow e^a$$

• Versión log.

$$1) \lim_{m \rightarrow a} \ln(a_m) \rightarrow \ln a$$

$$2) \left(\frac{\ln(a_m) - \ln(a)}{a_m - a} \right) \rightarrow \frac{1}{a}$$

$\frac{p_1}{1}$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$$

notamos

$$\begin{aligned} \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) &= \ln \left(\frac{k+1}{k} \right) \\ &= \ln(k+1) - \ln(k) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \left[\sum_{k=1}^m \ln(k+1) - \ln(k) \right]$$

telescopica! intuición

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \left[\cancel{\ln(2)} - \ln(1) + \cancel{\ln(3)} - \cancel{\ln(2)} + \dots + \cancel{\ln(m)} + \ln(m+1) - \cancel{\ln(m)} \right]$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \left[\ln(m+1) - \ln(1) \right] = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \cdot \ln \left(\frac{m+1}{1} \right)$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \ln(\sqrt[m]{m+1}) \stackrel{\text{Algebra}}{=} \ln(\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{m+1})$$

$$\Rightarrow = \ln(1) = 0 //$$

$$i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(e^n + e^{2n} + e^{3n} + 1)$$

Esta expresión llamada ∇ es creciente. Así que si quitamos o sumamos positivos ocurre lo usual!!

Recordemos que $\ln$ es creciente.

$$\frac{1}{n} \ln e^{3n} \leq \frac{1}{n} \ln(4e^{3n})$$

$$= \frac{3n}{n}$$

$$= 3$$

$$= \frac{1}{n} [\ln 4 + \ln(e^{3n})]$$

$$= \frac{\ln 4}{n} + 3$$

→ constante.

Al aplicar límite

$$3 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \nabla \leq \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \ln 4}{n} + 3$$

Por Teorema Sándwich.

$$ii) X_n = \left(\frac{n+2}{2n} \right)^n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right)^n$$

Es del tipo $(q_n)^n$, entonces

$$\text{Estudiamos } \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} < 1$$

Veamos

X_m y su decrecimiento, como bien recordamos se realiza a través de la diferencia entre 2 términos consecutivos de la sucesión

$$X_{m+1} - X_m = \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k} - \ln(m+1) - \left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{k} + \ln(m) \right)$$

$$= \cancel{\sum_{k=1}^m \frac{1}{k}} + \frac{1}{m+1} - \ln(m+1) - \cancel{\left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{k} + \ln(m) \right)}$$

$$= \frac{1}{m+1} + \ln\left(\frac{m}{m+1}\right) = \cancel{\frac{1}{m+1}} + \cancel{\ln\left(\frac{m}{m+1}\right)}$$

Sabemos que si $x > 0$

$$\Rightarrow \ln(x) \leq x - 1$$

$$\frac{1}{m+1} + \ln\left(\frac{m}{m+1}\right) \leq \frac{1}{m+1} + \frac{m}{m+1} - 1$$

$$= \frac{1+m-m-1}{m+1} = 0$$

$\Rightarrow X_{m+1} - X_m \leq 0$, X_m decreciente.

Veamos si está acotada

$$X_m = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \ln(m).$$

Por desigualdad del log

$$\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \cancel{1 + \frac{1}{k}} - \cancel{1} \\ = \frac{1}{k}, \quad \forall k \geq 1$$

Entonces $\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}, \quad \forall k \geq 1$ sumamos hasta $m-1$

$$\sum_{k=1}^{m-1} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k}$$

(II)

$$\Downarrow \sum_{k=1}^{m-1} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{m-1} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{m-1} \ln k+1 - \ln k$$

$$= \cancel{\ln 2} - \cancel{\ln 1} + \cancel{\ln 3} - \cancel{\ln 2} + \dots + \cancel{\ln m-1} - \cancel{\ln m-2} + \ln m - \cancel{\ln 1} \\ = -\ln 1 + \ln m = \ln m.$$

$$\Rightarrow \ln(m) \leq \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k}$$

$$\ln(m) \leq \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \frac{1}{m}$$

$$\ln(m) + \frac{1}{m} \leq \sum_{k=1}^m \frac{1}{k}$$

$$0 \leq \frac{1}{m} \leq \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \ln(m) = X_m$$

$0 \leq X_m$ Es ACOTADA!

Entonces por TSM. converge. (Este límite se llama de Euler Mascheroni)

Veamos $(Y_m) = X_m - \frac{1}{m} / \lim$

~~lim y_m = 0~~ $Y_m \leq X_m / \lim$
 $\lim Y_m \leq 0$ Es ACOTADA.

Veamos crecimiento

$$y_{m+1} - y_m = x_{m+1} - \frac{1}{m+1} - x_m + \frac{1}{m}$$

$$= \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k} - \ln(m+1) - \left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{k} + \ln(m) + \frac{1}{m} \right)$$

$$= \cancel{\sum_{k=1}^m \frac{1}{k}} + \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+1} - \ln(m+1) - \cancel{\sum_{k=1}^m \frac{1}{k}} - \ln(m) + \frac{1}{m}$$

$$= \ln\left(\frac{m}{m+1}\right) + \frac{1}{m}$$

$$1 - \frac{1}{\frac{m}{m+1}} \leq \ln\left(\frac{m}{m+1}\right)$$

$$1 - \frac{m+1}{m} \leq \ln\left(\frac{m}{m+1}\right) \quad / + \frac{1}{m}$$

$$1 - 1 - \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \leq \ln\left(\frac{m}{m+1}\right) + \frac{1}{m}$$

$$0 \leq \ln\left(\frac{m}{m+1}\right) + \frac{1}{m} = y_{m+1} - y_m$$

Como es creciente es Acotada superiormente y por TSM converge.

Luego $y_n = x_n - \frac{1}{n}$ / lim

$$\lim y_n = \lim x_n - \cancel{\lim \frac{1}{n}}^0$$

$$\lim y_n = \lim x_n$$

Ya terminamos !

Cualquier duda a pyanez@dim.uchile.cl