Salvando el C5

Auxiliares: PatoAux y Nachito

P1. Unos límites para entrar en calor

Calcular, si es que existen, los siguientes límites, justificando sus pasos en cada caso.

a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^3 - \sqrt{n+1} + 1}{\sqrt{9n^6 + n^4 + 1} - 2}$

b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{5 \cdot 9^n - n^7 \cdot 4^n}{3^{2n} + 6n^2}$

c) $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n^3}\right)^{3n^2}$

d) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+2}{2n}\right)^n$

P2. La sucesión de la sucesión de la sucesión de la sucesión de la sucesión de la sucesión de la sucesión

Sea (u_n) la sucesión definida por recurrencia como:

$$u_0 = a + b, \quad u_{n+1} = a + b - \frac{ab}{u_n} \quad \text{con } a > b > 0.$$

i) Demuestre por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > a$.

ii) Demuestre que u_n es decreciente. (*Hintazo:* $\forall n \Rightarrow$ Inducción.)

iii) Deduzca, argumentando, que (u_n) es convergente y calcule su límite justificandolo.

P3. Pato & Nachito sociedad limitada *(PaNa Ltda.)*

Calcule, en caso de existir, los siguientes limites:

a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \ln(1 + e^n + e^{2n} + e^{3n})$

b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n)}{n}$

c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n+2}{2n}}$

d) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a^n + b}{a^n - n}$

Hintazo para la d): Dividir en los casos $a \in (0,1)$ y $a > 1$.

P4. Un ε de calculos por definición.

a) Calcule, usando sólo definición de convergencia

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+3}$$

Hintazo: Use los métodos usuales que conoce para encontrar el buen candidato.

b) Demuestre, usando sólo definición de convergencia, que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-(-1)^n} = 0$$

P5. Sucesiones fantásticas y cómo convergerlas

Considere la sucesión (s_n) definida por:

$$s_n = \left(\frac{an+1}{2n}\right)^n, \quad \text{con } a \in (0,\infty) \text{ fijo.}$$

a) Demuestre que si $0 < a < 2, (s_n)$ converge y calcule su límite.

b) Demuestre que si $a > 2, (s_n)$ no es acotada ni convergente.

P6. Pato 🤝 Nachito

MA1101-10 Introducción al Cálculo
Profesor: Pedro Pérez.
Auxiliar: Patricio Yáñez A. ft Nachito
Consultas: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 16: C5 acábate por favor

P1. ***[Problema tipo control 20 min o control tipo 20 problema min]***

P1. a) (**1.5 pts.**) Demuestre, basado en la definición, que 2 es el supremo de $A = (-\infty, 2) \cap \mathbb{Q}$.

b) (**1.5 pts.**) Calcule, si existe, el límite de $s_n = \sqrt[n]{2 + (-1)^n}$

c) (**3 pts.**) Dado un real $a \in (0, 1)$, se define la sucesión

$$u_n = (1 + a)(1 + a^2)(1 + a^3) \cdots (1 + a^n)$$

Usando el teorema de sucesiones monótonas, demuestre que (u_n) es convergente .

Indicación: Puede ser útil aprovechar la conocida desigualdad de la exponencial $1 + x \leq e^x$ *y que*

$$\forall r \neq 1, \quad r + \cdots + r^n = \frac{r - r^{n+1}}{1 - r}$$

P2. Dada la sucesión

$$a_n \to L$$

se define

$$S_n = (1 + \frac{a_n}{n})^n$$

i)PDQ $\dfrac{S_n}{(1 + \frac{L}{n})^n} \to 1$

ii)PDQ S_n converge y calcular su límite

I)EXTRA EXTRA, feliz no cumpleaños a todos y todas, estudie convergencia y calcule su límite

Sea (s_n) la sucesión definida por recurrencia como:

$s_0 = \alpha, \quad s_1 = \beta, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad s_{n+1} = s_n \left(\frac{1+s_{n-1}+s_{n-1}^2}{3}\right)$, donde $\alpha, \beta \in (0, 1)$.

a) **(3 pts)** Demuestre que $\forall n \geq 1, \; s_n, s_{n-1} \in (0, 1)$.

P3. Crecimiento o crecí y miento o decrecimiento? mi entorno converge
Dada la sucesión estúdiela, analice crecimiento o decrecimiento y convergencia

$$u_n = \frac{n^n}{n!e^n}$$

P4. (30 min.) Sea (v_n) con $v_n \in (0,1)$ y $(\frac{1}{nv_n}) \to 0$. Demuestre que $\lim(1-v_n)^n = 0$.

P5. (30 min.) Sea (u_n) una sucesión creciente. Probar que la sucesión definida por $v_n = \frac{1}{n}(u_1 + \cdots + u_n)$ es creciente.

P6. (30 min.) Para $0 \leq a \leq b$ sea $x_1 = a$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ e $y_1 = b$, $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$. Demostrar que ambas sucesiones poseen límite, que $\lim x_n = \lim y_n$ y que si llamamos l a este último límite, se cumple que $\sqrt{ab} \leq l \leq \frac{a+b}{2}$.

P7. (30 min.) Sea $u_1 = a$ y $u_{n+1} = \sqrt{\frac{ab^2+u_n^2}{a+1}}$ con $0 < a < b$. Muestre que (u_n) es acotada, que es convergente y calcule su límite.

Ánimo son secos y secas, ustedes pueden!

P1

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - \sqrt{n+1} + 1}{\sqrt{9n^6+n^4+1} - 2} \cdot \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^3}{n^3} - \frac{\sqrt{n+1}}{n^3} + \frac{1}{n^3}}{\frac{\sqrt{9n^6+n^4+1}}{n^3} - \frac{2}{n^3}}$

Todos los lim son convergentes por separado y no son $=0$ en el denominador

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \sqrt{\frac{1}{n^5}+\frac{1}{n^6}} + \frac{1}{n^3}}{\sqrt{9+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^6}} - \frac{2}{n^3}}$

$= \frac{1 - 0 + 0}{\sqrt{9+0+0} - 0} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{5\cdot 9^n - n^7\cdot 4^n}{3^{2n}+6n^2} \cdot \frac{\frac{1}{9^n}}{\frac{1}{9^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5\cdot\frac{9^n}{9^n} - n^7\left(\frac{4}{9}\right)^n}{\frac{9^n}{9^n} + 6n^9\left(\frac{1}{9}\right)^n}$

lim conocido:

$\lim_{n\to\infty} n^k |q|^n = 0$

si $k\in\mathbb{N}$ y $|q|<1$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{5 - n^7\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 + 6n^9\left(\frac{1}{9}\right)^n}$

$= \frac{5 - 0}{1 - 0} = 5$

c) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^3}\right)^{3n^2}$ como $h=\frac{1}{n^3} > -1$ con $n \geq 1$ y $N = 3n^2 \in \mathbb{N}$

Podemos usar Bernoulli I:

$$\left(1-\frac{1}{n^3}\right)^{3n^2} = (1-h)^N \geq 1 - Nh = 1 - \frac{3n^2}{n^3} = 1 - \frac{3}{n}$$

Por otro lado cuando $n \geq 1$:

$$\left(1-\frac{1}{n^3}\right)^{3n^2} \leq (1)^{3n^2} = 1$$

Luego armamos sandwich: $1-\frac{3}{n} \leq \left(1-\frac{1}{n^3}\right)^{3n^2} \leq 1 \quad \forall n \geq 1$

y por teo. del sandwich:

$$\lim_{n\to\infty} 1-\frac{3}{n} \leq \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^3}\right)^{3n^2} \leq \lim_{n\to\infty} 1$$

$$\Rightarrow \quad 1 \leq \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^3}\right)^{3n^2} \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^3}\right)^{3n^2} = 1$$

d) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{2n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$

es de la forma $(q_n)^n$, con $q_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{n} \to \frac{1}{2}$ y $\left|\frac{1}{2}\right| < 1 \quad \therefore \lim_{n\to\infty}(q_n)^n = 0$

por lo que $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{2n}\right)^n = 0$

P2 $u_0 = a+b$, $u_{n+1} = a+b - \frac{ab}{u_n}$ con $a > b > 0$

a) Pdq: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > a$

CASO base: $n=0$ $u_0 = a+b > a$ pues $a > b$

CASO inductivo: Asumamos $\exists n \in \mathbb{N}$ tq $u_n > a$, veamos para u_{n+1}

$$u_{n+1} = a+b - \frac{ab}{u_n} > a+b - \frac{ab}{a} = a+b-b = a \Rightarrow u_{n+1} > a \,//$$

b) Pdq: u_n es decreciente $\Leftrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} \leq u_n$

Hint: inducción

CASO base: $u_1 \leq u_0 \Leftrightarrow a+b - \frac{ab}{a+b} \leq a+b$

$$\Leftrightarrow \frac{ab}{a+b} \geq 0$$ se tiene por $a > b > 0$

CASO inductivo: supongamos $\exists n \in \mathbb{N}$ tq $u_{n+1} \leq u_n$, veamos para $n+1$

$$u_{n+2} \leq u_{n+1} \Leftrightarrow a+b - \frac{ab}{u_{n+1}} \leq a+b - \frac{ab}{u_n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ab}{u_{n+1}} \geq \frac{ab}{u_n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1}} \geq \frac{1}{u_n}$$

$$\Leftrightarrow u_n \geq u_{n+1}$$

se tiene por HI

c) (u_n) convergente y calcular límite

- Por a) (u_n) es acotada
- por b) (u_n) es decreciente $\Rightarrow$ monótona

Por TSM (u_n) converge $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \ell$

Luego:

$$s_{n+1} = a+b-\frac{ab}{s_n} \iff \ell = a+b-\frac{ab}{\ell}$$

$$\iff \ell^2 = \ell(a+b) - ab$$

$$\iff \ell^2 - \ell(a+b) + ab = 0$$

$$\iff (\ell-a)(\ell-b) = 0$$

$$\iff \ell = a \lor \ell = b$$

con chicharronera, completar cuadrado, o 2 numeros que sumen $a+b$ y multipliquen ab

b no es punto de acumulación pues $s_n > a > b$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} s_n = a$$

Hint: El TSM nos decía $\ell = \inf\{(a, +\infty)\}$

$$\Rightarrow \ell = a$$

P3

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln(1+e^n+e^{2n}+e^{3n})$

VAMOS A ARMAR SANDWICH USANDO EL e^{3n} QUE ES EL MAS GRANDE

$$\frac{1}{n}\ln(\underbrace{0+0+0+e^{3n}}_{\text{cambiamos los mas chicos por } 0}) \leq \frac{1}{n}\ln(1+e^n+e^{2n}+e^{3n}) \leq \frac{1}{n}\ln(\underbrace{e^{3n}+e^{3n}+e^{3n}+e^{3n}}_{\text{sumamos solo el mas grande}})$$

$$\frac{1}{n}\ln(e^{3n}) \leq \frac{1}{n}\ln(1+e^n+e^{2n}+e^{3n}) \leq \frac{1}{n}\ln(4e^{3n})$$

$$\frac{3n}{n} \leq \frac{1}{n}\ln(1+e^n+e^{2n}+e^{3n}) \leq \frac{\ln(4)}{n} + \frac{3n}{n}$$

$$3 \leq \frac{1}{n}\ln(1+e^n+e^{2n}+e^{3n}) \leq \frac{\ln(4)}{n} + 3$$

POR TEO. DEL SANDWICH:

$$\lim_{n\to\infty} 3 \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln(1+e^n+e^{2n}+e^{3n}) \leq \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(4)}{n}+3$$

$$3 \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln(1+e^n+e^{2n}+e^{3n}) \leq 0+3 = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln(1+e^n+e^{2n}+e^{3n}) = 3$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln(n) = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(\sqrt[n]{n}\right)$

COMO $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

¿golazo?

$= \ln\left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right)$

$= \ln(1)$

$= 0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n+2}{2n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}$

es de la forma $\sqrt[n]{a_n}$ con

$a_n \to \frac{1}{2}$ POR P1 d), con $\frac{1}{2} > 0$

$\Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \to 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n+2}{2n}} = 1$

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n + b}{a^n - n}$

Por Hint dividimos en casos

si $a \in (0,1)$:

$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n+b}{a^n-n} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot a^n + \frac{1}{n}\cdot b}{\frac{1}{n}\cdot a^n - 1}$

$= \frac{0+0}{0-1} = 0$

como $a \in (0,1)$ a^n es sucesión nula, luego

$\frac{1}{n}\cdot a^n \to 0$

nula . nula = nula

$\frac{1}{n}\cdot b \to 0$

nula . acotada = nula

caso $a > 1$:

$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n+b}{a^n-n} \cdot \frac{\frac{1}{a^n}}{\frac{1}{a^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + b\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^n}{1 - n\left(\frac{1}{a}\right)^n}$

$= \frac{1+0}{1-0} = 1$

como $a > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{a} < 1$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^n \to 0$

para $n\left(\frac{1}{a}\right)^n$ vemos por sandwich

$0 \leq n\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^n \leq \left(\frac{1}{a}\right)^n$

$\Rightarrow \lim 0 \leq \lim n\left(\frac{1}{a}\right)^n \leq \lim\left(\frac{1}{a}\right)^n$

$\Rightarrow 0 \leq \lim n\left(\frac{1}{a}\right)^n \leq 0$

$\Rightarrow \lim n\left(\frac{1}{a}\right)^n = 0$

P4

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+3}$ usando Hint vemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+3} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}$$

$$= \frac{2+0}{1+0} = 2$$

Luego por def.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+3} = 2 \iff \forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \geq n_0 \left| \frac{2n+1}{n+3} - 2 \right| < \varepsilon$$

$$\iff \left| \frac{2n+1-2n-6}{n+3} \right| < \varepsilon$$

$$\iff \left| \frac{-5}{n+3} \right| < \varepsilon$$

$$\iff \frac{5}{n+3} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{5}{n} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow n \cdot \frac{\varepsilon}{5} > 1$$

se cumple por arquimediana o

con $n_0 = \left[\frac{\varepsilon}{5}\right] + 1$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-(-1)^n} = 0 \iff \forall \varepsilon>0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \left|\frac{1}{n-(-1)^n} - 0\right| < \varepsilon$

Si n impar

$$\left|\frac{1}{n-(-1)^n}\right| = \left|\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \quad y \quad n \cdot \varepsilon > 1 \text{ POR ARQUIMED.}$$

$$= \quad \varepsilon$$

$$\Rightarrow n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$$

Si n PAR

con $n>1$

$$\left|\frac{1}{n-(-1)^n}\right| = \left|\frac{1}{n-1}\right| \overset{\downarrow}{=} \frac{1}{n-1} \quad y \quad \frac{1}{n-1} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow n > 1 + \frac{1}{\varepsilon}$$

se tiene con $n_0 = \left[1 + \frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$

b) **(1.5 pts.)** Calcule, si existe, el límite de $s_n = \sqrt[n]{2 + (-1)^n}$

Solución: Usamos Sandwich. Claramente, ya que $-1 \leq (-1)^n \leq 1$,:

$$1 = \sqrt[n]{1} \leq s_n \leq \sqrt[n]{3}$$

0.5pt

Como $\sqrt[n]{1} \to 1$ y $\sqrt[n]{3} \to 1$, se concluye que $s_n \to 1$

1.0pt

c) (**3 pts.**) Dado un real $a \in (0,1)$, se define la sucesión

$$u_n = (1+a)(1+a^2)(1+a^3)\cdots(1+a^n)$$

Usando el teorema de sucesiones monótonas, demuestre que (u_n) es convergente .

Indicación: Puede ser útil aprovechar la conocida desigualdad de la exponencial $1+x \leq e^x$ *y que*

$$\forall r \neq 1, \quad r + \cdots + r^n = \frac{r - r^{n+1}}{1-r}$$

Solución: Claramente: $u_n > 0$ y $u_{n+1} = u_n \cdot (1 + a^{n+1}) \geq u_n$, por lo tanto es una sucesión creciente. 1pt

Además, usando la primera indicación,:

$$u_n \leq \exp(a)\exp(a^2)\exp(a^3)\cdots\exp(a^n)$$

0.5pt

$$= \exp(a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n)$$

0.5pt

$$= \exp\left(\tfrac{a - a^{n+1}}{1-a}\right) \leq \exp\left(\tfrac{a}{1-a}\right)$$

Por lo tanto (u_n) es una suceción acotada superiormente. 0.5pt

En virtud del teorema de sucesiones monótonas acotadas, se concluye que (u_n) es convergente. 0.5pt

c) $\lim (a_n) = L$ y $s_n = \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n$

i) Demostrar que $\lim \frac{s_n}{\left(1+\frac{L}{n}\right)^n} = 1$

$$\frac{s_n}{\left(1+\frac{L}{n}\right)^n} = \frac{\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{L}{n}\right)^n} = \left(\frac{1+\frac{a_n}{n}}{1+\frac{L}{n}}\right)^n = \left(\frac{1+\frac{L}{n}-\frac{L}{n}+\frac{a_n}{n}}{1+\frac{L}{n}}\right.$$

$$= \left(1 + \frac{\frac{a_n - L}{n}}{1+\frac{L}{n}}\right)^n \quad \text{donde} \quad \frac{a_n - L}{n+L} \to 0 \wedge n \cdot \frac{a_n - L}{n+L} \to 0$$

Por propiedad de clases $(1+u_n)^n \to 1$ si $u_n \to 0 \wedge n \cdot u_n \to 0$

1.0

Así, $\frac{s_n}{\left(1+\frac{L}{n}\right)^n} \to 1$

ii) Demostrar que (s_n) es convergente y calcule su límite.

$s_n = \left(1+\frac{L}{n}\right)^n \cdot \frac{s_n}{\left(1+\frac{L}{n}\right)^n}$ donde $\left(1+\frac{L}{n}\right) \to e^L$ y $\frac{s_n}{\left(1+\frac{L}{n}\right)^n} \to 1$ (según

1.0

Así $s_n \to e^L \cdot 1 = e^L$

Sea (s_n) la sucesión definida por recurrencia como:

$s_0 = \alpha, \qquad s_1 = \beta, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad s_{n+1} = s_n \left(\frac{1+s_{n-1}+s_{n-1}^2}{3}\right)$, donde $\alpha, \beta \in (0,1)$.

a) **(3 pts)** Demuestre que $\forall n \geq 1,\ s_n, s_{n-1} \in (0,1)$.

Solución: Por inducción: Para $n = 1$ se tiene que $s_n = \beta \in (0,1)$ y $s_{n-1} = \alpha \in (0,1)$. 0.5

Supongamos que $s_n, s_{n-1} \in (0,1)$, PDQ: $s_{n+1}, s_n \in (0,1)$. 0.5

Claramente $s_n \in (0,1)$ por hipótesis de inducción (directa). 0.5

Además (como $n \geq 1$):

$$s_{n+1} = s_n \left(\frac{1+s_{n-1}+s_{n-1}^2}{3}\right) > 0 \cdot \left(\frac{1+0+0^2}{3}\right) = 0. \quad 0.5$$

y

$$s_{n+1} = s_n \left(\frac{1+s_{n-1}+s_{n-1}^2}{3}\right) < 1 \cdot \left(\frac{1+1+1^2}{3}\right) = 1. \quad 1.0$$

b) **(3 pts)** Demuestre que (s_n) es convergente y calcule su límite.

Solución: Como $s_n \in (0,1)$, se tiene que $\forall n \geq 1$,

$$s_{n+1} = s_n \left(\frac{1+s_{n-1}+s_{n-1}^2}{3}\right) < s_n \cdot \left(\frac{1+1+1^2}{3}\right) = s_n. \quad 1.0$$

Por lo que (s_n) es decreciente. Como además es acotada inferiormente, es convergente. 0.5

Sea $\ell = \lim s_n$, entonces, tomando límite en la recurrencia se tiene que:

$$\ell = \ell \left(\frac{1+\ell+\ell^2}{3}\right). \quad 0.5$$

O sea, despejando:

$$\begin{aligned} &\iff \quad 3\ell = \ell + \ell^2 + \ell^3 \iff \ell(\ell^2+\ell-2) = 0 \\ &\iff \quad \ell(\ell-1)(\ell+2) = 0 \iff \ell = 0 \ \vee\ \ell = 1 \ \vee\ \ell = -2. \end{aligned} \quad 0.5$$

Como $s_n \in (0,1)$ es decreciente, su límite no puede ser ni 1 ni -2. Por lo tanto $\lim s_n = 0$. 0.5

P4. Sea (v_n) con $v_n \in (0,1)$ y $\left(\frac{1}{nv_n}\right) \to 0$. Demuestre que $\lim(1-v_n)^n = 0$.

Solución

Notemos que dado que $v_n \in (0,1)$, entonces $-v_n \in (-1,0)$. Por lo tanto $0 \leq 1 - v_n$ y luego $0 \leq (1-v_n)^n$. Además, por la tercera desigualdad de Bernoulli, tenemos que

$$(1-v_n)^n \leq \frac{1}{1+nv_n}.$$

La desigualdad anterior es válida ya que $-v_n \in (-1,0) \subset \left(-1, \frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}$. Análogamente al problema anterior se concluye que $\frac{1}{1+nv_n} \to 0$ y por Sandwich de Sucesiones

$$(1-v_n)^n \to 0. \blacksquare$$

P3)

b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $u_n = \dfrac{n^n}{n!\,e^n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!\,e^{n+1}}}{\dfrac{n^n}{n!\,e^n}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!\,e^{n+1}} \cdot \frac{n!\,e^n}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n}\,\frac{1}{e} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{e}$$

Sigue que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e} < \dfrac{e}{e} = 1$ pues $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$ creci

(2.0) Así: $u_{n+1} < u_n$ entonces $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente.

También $u_n > 0 \ \forall n$

Entonces $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y acotado inferiormente (p

(1.0) Por lo tanto $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente (TEOR. MONÓTONAS)

Lo último pues $x_n \leq y_n$. Por lo tanto (y_n) es decreciente y además acotada inferiormente, entonces es convergente. Ahora veamos que (x_n) es creciente. Observemos que

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \sqrt{x_n y_n} - x_n \\ &\geq \sqrt{y_n y_n} - x_n \\ &= y_n - x_n \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto (x_n) es creciente y como es acotada superiormente, entonces es convergente. Para ver la igualdad de los límites basta notar que

$$\begin{aligned} y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} &\implies \text{lím}\, y_{n+1} = \text{lím}\, y_n = \frac{\text{lím}\, x_n + \text{lím}\, y_n}{2} \\ &\implies 2\,\text{lím}\, y_n = \text{lím}\, x_n + \text{lím}\, y_n \\ &\implies \text{lím}\, y_n = \text{lím}\, x_n. \end{aligned}$$

Esto es válido por Álgebra de Límites pues ambos límites existen. Recordemos que para una sucesión (s_n) creciente y acotada superiormente, su límite es $\sup\{s_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$, y para una sucesión (u_n) decreciente y acotada inferiormente, su límite es $\text{ínf}\{u_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. En particular, para (x_n) cualquier término es menor que el límite, y para (y_n) cualquier término es mayor que el límite. Así, considerando $n = 2$ tenemos que

$$\sqrt{ab} = x_2 \leq l \leq y_2 = \frac{a+b}{2}. \blacksquare$$

P7. Sea $u_1 = a$ y $u_{n+1} = \sqrt{\frac{ab^2 + u_n^2}{a+1}}$, con $0 < a < b$. Muestre que (u_n) es acotada, que es convergente y calcule su límite.

Solución

Comencemos viendo que es acotada por b, por inducción sobre n. El caso base es trivial. Supongamos que se cumple para algún $n \in \mathbb{N}$, verifiquemos que se cumple para el caso $n + 1$. En efecto

$$\begin{aligned} u_n \leq b &\iff u_n^2 \leq b^2 \\ &\iff u_n^2 + ab^2 \leq b^2 + ab^2 \\ &\iff u_n^2 + ab^2 \leq (a+1)b^2 \\ &\iff \frac{ab^2 + u_n^2}{a+1} \leq b^2 \\ &\iff \sqrt{\frac{ab^2 + u_n^2}{a+1}} \leq b \\ &\iff u_{n+1} \leq b. \end{aligned}$$

Donde todas son equivalencias ya que todos los términos involucrados son positivos. Para demostrar que es convergente, veamos ahora que es creciente. El razonamiento es parecido al anterior.

$$\begin{aligned} u_n \leq b &\iff u_n^2 \leq b^2 \\ &\iff a u_n^2 \leq ab^2 \\ &\iff a u_n^2 + u_n^2 \leq ab^2 + u_n^2 \\ &\iff (a+1)u_n^2 \leq ab^2 + u_n^2 \\ &\iff u_n^2 \leq \frac{u_n^2 + ab^2}{a+1} \\ &\iff u_n^2 \leq u_{n+1}^2 \\ &\iff u_n \leq u_{n+1}. \end{aligned}$$

Donde nuevamente todo es equivalencia por las mismas razones. Como (u_n) es una sucesión monótona y acotada, entonces es convergente. Llamemos $\ell = \text{lím}\, u_n$. Para calcular el valor de

ℓ notemos que $u_{n+1}^2 = \frac{ab^2+u_n^2}{a+1}$ y entonces tomando límite obtenemos que

$$\begin{aligned}
\ell^2 = \frac{ab^2+\ell^2}{a+1} &\iff (a+1)\ell^2 = ab^2 + \ell^2 \\
&\iff (a+1)\ell^2 - \ell^2 = ab^2 \\
&\iff \ell^2(a+1-1) = ab^2 \\
&\iff a\ell^2 = ab^2 \\
&\iff \ell^2 = b^2 \\
&\iff \ell = b.
\end{aligned}$$

La razón de las equivalencias es análoga a lo anterior.■
Nota: Queda como ejercicio para el lector verificar que $s_n \to s \Longrightarrow s_n^2 \to s^2$.