# Salvando el C5

**Auxiliares:** PatoAux y Nachito

## P1. Unos límites para entrar en calor

Calcular, si es que existen, los siguientes límites, justificando sus pasos en cada caso.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 - \sqrt{n+1} + 1}{\sqrt{9n^6 + n^4 + 1} - 2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5 \cdot 9^n - n^7 \cdot 4^n}{3^{2n} + 6n^2}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n^3}\right)^{3n^2}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+2}{2n}\right)^{n}$

## P2. La sucesión de la sucesión de la sucesión de la sucesión de la sucesión de la sucesión de la sucesión

Sea $(u_n)$ la sucesión definida por recurrencia como:

$$u_0 = a + b, \quad u_{n+1} = a + b - \frac{ab}{u_n} \quad \text{con } a > b > 0.$$

i) Demuestre por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > a$.

ii) Demuestre que $u_n$ es decreciente. (*Hintazo:* $\forall n \Rightarrow$ Inducción.)

iii) Deduzca, argumentando, que $(u_n)$ es convergente y calcule su límite justificandolo.

## P3. Pato & Nachito sociedad limitada *(PaNa Ltda.)*

Calcule, en caso de existir, los siguientes limites:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \ln(1 + e^n + e^{2n} + e^{3n})$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n)}{n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n+2}{2n}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n + b}{a^n - n}$

*Hintazo* para la d): Dividir en los casos $a \in (0,1)$ y $a > 1$.

## P4. Un $\varepsilon$ de calculos por definición.

a) Calcule, usando sólo definición de convergencia

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+3}$$

*Hintazo:* Use los métodos usuales que conoce para encontrar el buen candidato.

b) Demuestre, usando sólo definición de convergencia, que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-(-1)^n} = 0$$

## P5. Sucesiones fantásticas y cómo convergerlas

Considere la sucesión $(s_n)$ definida por:

$$s_n = \left(\frac{an+1}{2n}\right)^n, \quad \text{con } a \in (0,\infty) \text{ fijo.}$$

a) Demuestre que si $0 < a < 2, (s_n)$ converge y calcule su límite.
b) Demuestre que si $a > 2, (s_n)$ no es acotada ni convergente.

## P6. Pato 🤝 Nachito

**MA1101-10 Introducción al Cálculo**
**Profesor:** Pedro Pérez.
**Auxiliar:** Patricio Yáñez A. ft Nachito
**Consultas:** pyanez@dim.uchile.cl

# Auxiliar 16: C5 acábate por favor

**P1.** ***[Problema tipo control 20 min o control tipo 20 problema min]***

**P1. a) (1.5 pts.)** Demuestre, basado en la definición, que 2 es el supremo de $A = (-\infty, 2) \cap \mathbb{Q}$.

**b) (1.5 pts.)** Calcule, si existe, el límite de $s_n = \sqrt[n]{2 + (-1)^n}$

**c) (3 pts.)** Dado un real $a \in (0, 1)$, se define la sucesión

$$u_n = (1 + a)(1 + a^2)(1 + a^3) \cdots (1 + a^n)$$

Usando el teorema de sucesiones monótonas, demuestre que $(u_n)$ es convergente .

*Indicación: Puede ser útil aprovechar la conocida desigualdad de la exponencial* $1 + x \leq e^x$ *y que*

$$\forall r \neq 1, \quad r + \cdots + r^n = \frac{r - r^{n+1}}{1 - r}$$

**P2.** Dada la sucesión

$$a_n \to L$$

se define

$$S_n = (1 + \frac{a_n}{n})^n$$

i)PDQ $\dfrac{S_n}{(1 + \dfrac{L}{n})^n} \to 1$
ii)PDQ $S_n$ converge y calcular su límite
I)EXTRA EXTRA, feliz no cumpleaños a todos y todas, estudie convergencia y calcule su límite

Sea $(s_n)$ la sucesión definida por recurrencia como:
$s_0 = \alpha, \qquad s_1 = \beta, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad s_{n+1} = s_n \left(\frac{1+s_{n-1}+s_{n-1}^2}{3}\right)$, donde $\alpha, \beta \in (0, 1)$.

**a) (3 pts)** Demuestre que $\forall n \geq 1, \; s_n, s_{n-1} \in (0, 1)$.

**P3.** Crecimiento o crecí y miento o decrecimiento? mi entorno converge
Dada la sucesión estúdiela, analice crecimiento o decrecimiento y convergencia

$$u_n = \frac{n^n}{n!e^n}$$

**P4.** (30 min.) Sea $(v_n)$ con $v_n \in (0,1)$ y $(\frac{1}{nv_n}) \to 0$. Demuestre que $\lim (1 - v_n)^n = 0$.

**P5.** (30 min.) Sea $(u_n)$ una sucesión creciente. Probar que la sucesión definida por $v_n = \frac{1}{n}(u_1 + \cdots + u_n)$ es creciente.

**P6.** (30 min.) Para $0 \leq a \leq b$ sea $x_1 = a$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ e $y_1 = b$, $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$. Demostrar que ambas sucesiones poseen límite, que $\lim x_n = \lim y_n$ y que si llamamos $l$ a este último límite, se cumple que $\sqrt{ab} \leq l \leq \frac{a+b}{2}$.

**P7.** (30 min.) Sea $u_1 = a$ y $u_{n+1} = \sqrt{\frac{ab^2 + u_n^2}{a+1}}$ con $0 < a < b$. Muestre que $(u_n)$ es acotada, que es convergente y calcule su límite.

**Ánimo son secos y secas, ustedes pueden!**