MA1101-10 Introducción al Cálculo
Profesor: Pedro Pérez.
Auxiliar: Patricio Yáñez A. ft Nachito
Consultas: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 16: C5 acábate por favor

P1. ***[Problema tipo control 20 min o control tipo 20 problema min]***

P1. a) (**1.5 pts.**) Demuestre, basado en la definición, que 2 es el supremo de $A = (-\infty, 2) \cap \mathbb{Q}$.

b) (**1.5 pts.**) Calcule, si existe, el límite de $s_n = \sqrt[n]{2 + (-1)^n}$

c) (**3 pts.**) Dado un real $a \in (0, 1)$, se define la sucesión

$$u_n = (1 + a)(1 + a^2)(1 + a^3) \cdots (1 + a^n)$$

Usando el teorema de sucesiones monótonas, demuestre que (u_n) es convergente .

Indicación: Puede ser útil aprovechar la conocida desigualdad de la exponencial $1 + x \le e^x$ *y que*

$$\forall r \neq 1, \quad r + \cdots + r^n = \frac{r - r^{n+1}}{1 - r}$$

P2. Dada la sucesión

$$a_n \to L$$

se define

$$S_n = (1 + \frac{a_n}{n})^n$$

i)PDQ $\dfrac{S_n}{(1 + \frac{L}{n})^n} \to 1$
ii)PDQ S_n converge y calcular su límite
I)EXTRA EXTRA, feliz no cumpleaños a todos y todas, estudie convergencia y calcule su límite

Sea (s_n) la sucesión definida por recurrencia como:
$s_0 = \alpha, \qquad s_1 = \beta, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad s_{n+1} = s_n \left(\frac{1 + s_{n-1} + s_{n-1}^2}{3} \right)$, donde $\alpha, \beta \in (0, 1)$.

a) **(3 pts)** Demuestre que $\forall n \geq 1,\ s_n, s_{n-1} \in (0, 1)$.

P3. Crecimiento o crecí y miento o decrecimiento? mi entorno converge
Dada la sucesión estúdiela, analice crecimiento o decrecimiento y convergencia

$$u_n = \frac{n^n}{n!e^n}$$

P4. (30 min.) Sea (v_n) con $v_n \in (0,1)$ y $(\frac{1}{nv_n}) \to 0$. Demuestre que $\lim(1-v_n)^n = 0$.

P5. (30 min.) Sea (u_n) una sucesión creciente. Probar que la sucesión definida por $v_n = \frac{1}{n}(u_1 + \cdots + u_n)$ es creciente.

P6. (30 min.) Para $0 \leq a \leq b$ sea $x_1 = a$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ e $y_1 = b$, $y_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}$. Demostrar que ambas sucesiones poseen límite, que $\lim x_n = \lim y_n$ y que si llamamos l a este último límite, se cumple que $\sqrt{ab} \leq l \leq \frac{a+b}{2}$.

P7. (30 min.) Sea $u_1 = a$ y $u_{n+1} = \sqrt{\frac{ab^2+u_n^2}{a+1}}$ con $0 < a < b$. Muestre que (u_n) es acotada, que es convergente y calcule su límite.

Ánimo son secos y secas, ustedes pueden!