P3)

Sea (a_n) se que existe $\lim_{n\to\infty} n\, a_n$. Dem $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Indicación

Si $X_n \to l$, y se tiene $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus f(n) \geq n \Rightarrow X_{f(n)} \to l$

$f(n) = \bar{n} \geq n \geq n_0$

$\Rightarrow \to l$

Indicación

Si $X_n \to l$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0 \; |X_n - l| < \varepsilon$ ① Definición

Veamos que si $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\underline{f(n) \geq n}$ *

↳ creciente como $n+1$, n^2+1000 etc.

$\Rightarrow X_{f(n)} \to l$,

PDQ.

$(\forall \varepsilon > 0), (\exists n_0' \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0') \; \underbrace{|X_{f(n)} - l| < \varepsilon}$

lo que quiero.

Nosotros sabemos que dado $\varepsilon > 0$

$|X_n - l| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$ ②

luego si $n_0' = n_0$

$\Rightarrow f(n_0') \geq n_0 \Rightarrow |X_{f(n_0')} - l| < \varepsilon$

Además si $\underline{n \geq n_0' = n_0}$

$\Rightarrow f(n) \geq n \geq n_0 \Rightarrow f(n) \geq n_0 \Rightarrow |X_{f(n)} - l| < \varepsilon$ //

$n \cdot a_n \longrightarrow l \in \mathbb{R}$

PDQ $a_n \to 0$

$(\exists\, \varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists\, n' \geq n) : |a_n - 0| > 0|$

ε fijo

$n' = f(n) \geq n$

(Para cada n $\exists n' \geq n$

$|a_{f(n)} - 0| > \varepsilon$

Se tiene $\underline{|a_{f(n)}| > \varepsilon}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

$\to$ Indicación Acá use la indicación ! !

Pero.

$\underbrace{a_n \cdot n}_{} \to l \Rightarrow f(n) \cdot a_{f(n)} \to l$

$c_n \to l \Rightarrow c_{f(n)} \longrightarrow l$

$\Rightarrow$ c_n acotada pues converge

pero

$|c_n| = |f(n) \cdot a_{f(n)}| = |f(n)||a_{f(n)}| \geq f(n) \cdot \varepsilon$

$\geq n \cdot \varepsilon$

$|c_n| \geq n \cdot \varepsilon \to \infty$

Sea (s_n) la sucesión definida por recurrencia como:

$s_0 = \alpha, \qquad s_1 = \beta, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad s_{n+1} = s_n \left(\frac{1+s_{n-1}+s_{n-1}^2}{3}\right)$, donde $\alpha, \beta \in (0,1)$.

a) **(3 pts)** Demuestre que $\forall n \geq 1,\ s_n, s_{n-1} \in (0,1)$.

Solución: Por inducción: Para $n = 1$ se tiene que $s_n = \beta \in (0,1)$ y $s_{n-1} = \alpha \in (0,1)$. 0.5

Supongamos que $s_n, s_{n-1} \in (0,1)$, PDQ: $s_{n+1}, s_n \in (0,1)$. 0.5

Claramente $s_n \in (0,1)$ por hipótesis de inducción (directa). 0.5

Además (como $n \geq 1$):

$$s_{n+1} = s_n \left(\frac{1+s_{n-1}+s_{n-1}^2}{3}\right) > 0 \cdot \left(\frac{1+0+0^2}{3}\right) = 0.$$

0.5

y

$$s_{n+1} = s_n \left(\frac{1+s_{n-1}+s_{n-1}^2}{3}\right) < 1 \cdot \left(\frac{1+1+1^2}{3}\right) = 1.$$

1.0

b) **(3 pts)** Demuestre que (s_n) es convergente y calcule su límite.

Solución: Como $s_n \in (0,1)$, se tiene que $\forall n \geq 1$,

$$s_{n+1} = s_n \left(\frac{1+s_{n-1}+s_{n-1}^2}{3}\right) < s_n \cdot \left(\frac{1+1+1^2}{3}\right) = s_n.$$

1.0

Por lo que (s_n) es decreciente. Como además es acotada inferiormente, es convergente. 0.5

Sea $\ell = \lim s_n$, entonces, tomando límite en la recurrencia se tiene que:

$$\ell = \ell \left(\frac{1+\ell+\ell^2}{3}\right).$$

0.5

O sea, despejando:

$$\begin{aligned} &\iff \quad 3\ell = \ell + \ell^2 + \ell^3 \iff \ell(\ell^2+\ell-2) = 0 \\ &\iff \quad \ell(\ell-1)(\ell+2) = 0 \iff \ell = 0 \ \vee\ \ell = 1 \ \vee\ \ell = -2. \end{aligned}$$

0.5

Como $s_n \in (0,1)$ es decreciente, su límite no puede ser ni 1 ni -2. Por lo tanto $\lim s_n = 0$. 0.5

P2. *a)* Considere $a > 0$ y la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_1 = \sqrt{a}$ y $(\forall n \in \mathbb{N})$ $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$.

i) (1.5 pts) Demuestre que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y no negativa.

Solución: Mediante Inducción, se demostrará que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $0 \leq x_n \leq x_{n+1}$. **(0.3 pts)**
Esto es cierto cuando $n = 1$, ya que

$$0 \leq x_1 = \sqrt{a} < \sqrt{a + \sqrt{a}} = x_2 \qquad \textbf{(0.5 pts)}$$

puesto que la función raíz cuadrada es creciente. Ahora, suponiendo que la propiedad es cierta para $n \in \mathbb{N}$, se debe probar que es también cierta para $n + 1$. En efecto, como $x_n \geq 0$, se cumple que

$$0 < \sqrt{a} \leq \sqrt{a + x_n} = x_{n+1}. \qquad \textbf{(0.2 pts)}$$

Dado que $x_n \leq x_{n+1}$ y la monotonía de la función raíz cuadrada,

$$x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} \leq \sqrt{a + x_{n+1}} = x_{n+2} \qquad \textbf{(0.3 pts)}$$

probando así la tesis inductiva.

En conclusión, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es no negativa y creciente. **(0.2 pts)**

ii) (1.0 pto) Pruebe que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $x_n \leq u$, donde u es la única raíz positiva de la ecuación $u^2 = u + a$.
Indicación: Aplique la condición $u^2 = u + a$ cuando sea necesario.

Solución: Nuevamente se procede por Inducción. En primer lugar, para $n = 1$, se tiene que

$$x_1 = \sqrt{a} \leq \sqrt{a + u} = \sqrt{u^2} = u. \qquad \textbf{(0.4 pts)}$$

Análogamente, si es cierto para $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} \leq \sqrt{a + u} = \sqrt{u^2} = u \qquad \textbf{(0.4 pts)}$$

probando que también lo es para $n + 1$.

En conclusión, la sucesión es acotada superiormente por u. **(0.2 pts)**

iii) (1.5 pts) Concluya que la sucesión posee límite y calcúlelo.

Solución: En virtud del Teorema de Sucesiones Monótonas, dado que la sucesión es acotada superiormente y monótona creciente, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. **(0.5 pts)**

Si $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = L$, aplicando Álgebra de Límites de Sucesiones, se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} x_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{a + x_n}\\ L &= \sqrt{a+L}\\ L^2 &= a + L\end{aligned}$$

(0.3 pts)

la cual es una ecuación cuadrática que tiene dos soluciones dadas por

$$L = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2} \text{ (negativa) y } L = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} \text{ (positiva).}$$

(0.3 pts)

Sin embargo, la sucesión es no negativa, por lo que $L \geq 0$. En conclusión,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

(0.4 pts)