MA1101-10 Introducción al Cálculo
Profesor: Pedro Pérez.
Auxiliar: Patricio Yáñez A.
Consultas: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 14: Sucesos Bernoulli II, teoría y sándwich

P1. ***[Trabajemos con un poco más de teoría]***
Sea (a_n) una sucesión tal que existe $\lim_{n\to\infty} n \cdot a_n$. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Probar que si $x_n \to l$ y se tiene $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(n) \geq n$, entonces $x_{f(n)} \to l$

P2. Dada las sucesiones

Sea (s_n) la sucesión definida por recurrencia como:

$$s_0 = \alpha, \qquad s_1 = \beta, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad s_{n+1} = s_n \left(\frac{1 + s_{n-1} + s_{n-1}^2}{3} \right),$$

donde $\alpha, \beta \in (0,1)$.

a) **(3 pts)** Demuestre que $\forall n \geq 1,\ s_n, s_{n-1} \in (0,1)$.

b) **(3 pts)** Demuestre que (s_n) es convergente y calcule su límite.

P2. *a)* Considere $a > 0$ y la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_1 = \sqrt{a}$ y $(\forall n \in \mathbb{N})$ $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$.

i) (1.5 pts) Demuestre que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y no negativa.

ii) (1.0 pto) Pruebe que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $x_n \leq u$, donde u es la única raíz positiva de la ecuación $u^2 = u + a$.
<u>Indicación:</u> Aplique la condición $u^2 = u + a$ cuando sea necesario.

iii) (1.5 pts) Concluya que la sucesión posee límite y calcúlelo.