MA1101-10 Introducción al Cálculo
Profesor: Pedro Pérez.
Auxiliar: Patricio Yáñez A.
Consultas: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 13: Sucesos Bernoulli, teoría y sándwich

P0. ***[Trabajemos con un poco más de teoría]***

Sea (a_n) una sucesión tal que existe $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot a_n$. Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Probar que si $x_n \to l$ y se tiene $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(n) \geq n$, entonces $x_{f(n)} \to l$

P1. (30 min.) Sea $u_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)$. Calcular $\lim \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$.

P2. (30 min.) Dado $k \in \mathbb{N}$, estudie la convergencia de la sucesión $(n^k q_n^n)$, donde $(q_n) \to q$ con $|q| < 1$.

P3. (30 min.) Sea (h_n) con $h_n > 0$ y $(\frac{1}{nh_n}) \to 0$. Demuestre que $\lim \frac{1}{(1+h_n)^n} = 0$.

P1. Sea $u_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)$. Calcular $\lim \frac{u_1 + \ldots + u_n}{n}$.

Solución

Notemos que el denominador se escribe como $\sum_{k=1}^{n} u_k$. Calculemos esta suma.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} u_k &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(1 + (-1)^k) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (1 + (-1)^k) \\
&= \frac{1}{2} \left[\underbrace{\sum_{k=1}^{n} 1}_{n} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \right] \\
&= \frac{n}{2} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k.
\end{aligned}$$

Para calcular la suma que queda, fijemonos que si n es par, entonces $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k = 0$, pues estamos sumando una cantidad par de terminos de la forma $((-1) + 1)$. Si n es impar, $n + 1$ es par, y entonces

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k - (-1)^{n+1} = -1.$$

Luego

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ par} \\ \frac{n}{2} - \frac{1}{2} & n \text{ impar.} \end{cases}$$

Por lo tanto, concluimos que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & n \text{ par} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} & n \text{ impar.} \end{cases}$$

Con esto intuimos que debería ser que el límite es $\frac{1}{2}$, pero debemos demostrarlo. Es decir, debemos mostrar que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \quad \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k - \frac{1}{2} \right| \leq \varepsilon.$$

Notemos que

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k - \frac{1}{2} \right| = \begin{cases} 0 & n \text{ par.} \\ \frac{1}{2n} & n \text{ impar.} \end{cases}$$

Es decir, $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$0 \leq \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{2n}.$$

El Sandwich de Sucesiones implica que

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k - \frac{1}{2} \right| \to 0$$

es decir

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \to \frac{1}{2}.\blacksquare$$

P2. Dado $k \in \mathbb{N}$, estudie la convergencia de la sucesión $(n^k q_n^n)$, donde $(q_n) \to q$ con $|q| < 1$.
Solución
Como sabemos que $q_n \to q$, entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se tiene que

$$0 \leq |q_n| \leq \frac{|q|+1}{2}.$$

Elevando a la potencia n obtenemos que

$$0 \leq |q_n|^n \leq \left(\frac{|q|+1}{2}\right)^n.$$

Multiplicando por n^k tenemos que

$$0 \leq n^k |q_n|^n \leq n^k \left(\frac{|q|+1}{2}\right)^n.$$

Notemos que como $|q| < 1$, entonces $\frac{|q|+1}{2} < 1$. Por propiedad demostrada en el apunte sabemos que si $u \in \mathbb{R}$ es tal que $|u| < 1$, entonces $n^k u^n \to 0$. Luego, por Sandwich de Sucesiones concluimos que

$$n^k q_n^n \to 0.\blacksquare$$

P3. Sea (h_n) con $h_n > 0$ y $\left(\frac{1}{nh_n}\right) \to 0$. Demuestre que $\lim \frac{1}{(1+h_n)^n} = 0$.
Solución
Como todos los términos de (h_n) son positivos, inmediatamente obtenemos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \frac{1}{(1+h_n)^n}$.
De la primera desigualdad de Bernoulli tenemos

$$(1+h_n)^n \geq 1 + nh_n$$

es decir

$$\frac{1}{(1+h_n)^n} \leq \frac{1}{1+nh_n}.$$

Estas desigualdades son válidas pues todos los h_n son positivos. En resumen tenemos que

$$0 \leq \frac{1}{(1+h_n)^n} \leq \frac{1}{1+nh_n}.$$

Notando que

$$\frac{1}{1+nh_n} = \frac{\frac{1}{nh_n}}{\frac{1}{nh_n}+1}$$

por la hipótesis del problema, utilizando Álgebra de Límites concluimos que $\frac{1}{1+nh_n} \to 0$ y el Sandwich de Sucesiones implica que

$$\frac{1}{(1+h_n)^n} \to 0.\blacksquare$$

P4. Sea (v_n) con $v_n \in (0,1)$ y $\left(\frac{1}{nv_n}\right) \to 0$. Demuestre que $\lim(1-v_n)^n = 0$.
Solución
Notemos que dado que $v_n \in (0,1)$, entonces $-v_n \in (-1,0)$. Por lo tanto $0 \leq 1 - v_n$ y luego $0 \leq (1-v_n)^n$. Además, por la tercera desigualdad de Bernoulli, tenemos que

$$(1-v_n)^n \leq \frac{1}{1+nv_n}.$$

La desigualdad anterior es válida ya que $-v_n \in (-1,0) \subset \left(-1,\frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}$. Análogamente al problema anterior se concluye que $\frac{1}{1+nv_n} \to 0$ y por Sandwich de Sucesiones

$$(1-v_n)^n \to 0.\blacksquare$$