10. Semana 9

P1

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(1+4+4^2+...+4^{k-1})\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{k-1}4^i\binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4^k-1}{4-1}\right)\binom{n}{k} \qquad \backslash\text{geométrica} \\
&= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(4^k\binom{n}{k}-\binom{n}{k}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left[\sum_{k=1}^{n}4^k\binom{n}{k}-\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}4^k+1-1-\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\right] \qquad \backslash\text{sumar } 0 \\
&= \frac{1}{3}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}4^k+1\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}+1\right)\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}4^k-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right] \quad \backslash\text{agregar primer término} \\
&= \frac{1}{3}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}4^k\cdot 1^{n-k}-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k\cdot 1^{n-k}\right] \quad \backslash 1^{n-k}=1 \\
&= \frac{1}{3}\left[(4+1)^n-(1+1)^n\right] \qquad \backslash\text{binomio} \\
&= \frac{5^n-2^n}{3}
\end{aligned}
$$

P2

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\frac{8^{k+1}}{3^i} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{8}{3^i}\left(\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}8^k\right) && \backslash\text{salida de constantes}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{8}{3^i}\left(\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}8^k\cdot 1^{i-k}\right) && \backslash 1^{i-k}=1\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{8}{3^i}(8+1)^i && \backslash\text{binomio}\\
&= 8\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}3^i\right)\\
&= 8\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{3^{j+1}-3}{3-1}\right) && \backslash\text{geométrica}\\
&= 4\left[\sum_{j=1}^{n}3^{j+1}-\sum_{j=1}^{n}3\right]\\
&= 12\left[\sum_{j=1}^{n}3^{j}-\sum_{j=1}^{n}1\right]\\
&= 12\left[\frac{3^{n+1}-3}{3-1}-n\right] && \backslash\text{geométrica}\\
&= 6(3^{n+1}-3)-12n
\end{aligned}
$$

P3

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(1-x)^k &= \frac{1-(1-x)^{n+1}}{1-(1-x)} && \text{\textbackslash geométrica}\\
&= \frac{1-\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-x)^k\cdot 1^{n+1-k}}{x} && \text{\textbackslash binomio}\\
&= \frac{1-\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-x)^k}{x} && \backslash 1^{n+1-k}=1\\
&= \frac{1-(\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-x)^k+\binom{n+1}{0}(-x)^0)}{x} && \text{\textbackslash soltar primer término}\\
&= \frac{1-(\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-x)^k+1)}{x}\\
&= \frac{-\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-x)^k}{x}\\
&= \frac{-\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}(-x)^{k+1}}{x} && \text{\textbackslash cambio de índice}\\
&= \frac{-\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}(-x)^k(-x)}{x}\\
&= \frac{x\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}(-x)^k}{x}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}(-x)^k\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}(x)^k(-1)^k
\end{aligned}
$$

P4

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k7^k \binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} k7^k \binom{n}{k} && \backslash\text{soltar primer término } =0 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k7^k n!}{k!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{7^k n!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{7^{k+1} n!}{k!(n-(k+1))!} && \backslash\text{cambio de índice} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{7^{k+1} n!}{k!((n-1)-k)!} \\
&= n\sum_{k=0}^{n-1} \frac{7^{k+1} (n-1)!}{k!((n-1)-k)!} && \backslash\text{definición factorial } n! = n(n-1)! \\
&= n\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 7^{k+1} \\
&= 7n\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 7^{k} \cdot 1^{n-1-k} && \backslash 1^{n-1-k} = 1 \\
&= 7n(7+1)^{n-1} && \backslash\text{binomio} \\
&= 7n8^{n-1}
\end{aligned}$$

P5 (a)

$$\begin{aligned}
\binom{n}{i}\binom{i}{k} &= \frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{i!}{k!(i-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-i)!(i-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-i)!(i-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(n-k)!}{(n-i)!(i-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(n-k)!}{((n-k)-(i-k))!(i-k)!} \\
&= \binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k} &= \sum_{i=k}^{n}\binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k} && \backslash\text{usando parte anterior}\\
&= \binom{n}{k}\sum_{i=k}^{n}\binom{n-k}{i-k} && \backslash\text{constantes salen}\\
&= \binom{n}{k}\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-k}{i} && \backslash\text{cambio de índice}\\
&= \binom{n}{k}\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-k}{i}1^{n-k-i}1^{i} && \backslash 1^{n-k-i}=1\\
&= \binom{n}{k}(1+1)^{n-k} && \backslash\text{binomio}\\
&= \binom{n}{k}2^{n-k}
\end{aligned}$$

P6 **(a)** Vamos a dividir o "particionar" C en una colección infinita (numerable) de conjuntos, luego probaremos que cada uno de ellos es numerable, primero fijamos n y con esto tenemos los siguientes subconjuntos.

$$C = \begin{cases} C_1 = & \{x \in [0,+\infty), x \in \mathbb{N}\} = \{1,2,3,4...\} \\ C_2 = & \{x \in [0,+\infty), x^2 \in \mathbb{N}\} = \left\{1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4}...\right\} \\ \vdots & \\ C_n = & \{x \in [0,+\infty), x^n \in \mathbb{N}\} = \left\{1,\sqrt[n]{2},\sqrt[n]{3},\sqrt[n]{4}...\right\} \end{cases}$$

Para cada C_n podemos establecer la siguiente función $f_n : C_n \to \mathbb{N}$ $f(x) = x^n$, por ejemplo, para $C_2 : f\left(\sqrt{2}\right) = (\sqrt{2})^2 = 2, f\left(\sqrt{3}\right) = (\sqrt{3})^2 = 3, f\left(\sqrt{4}\right) = (\sqrt{4})^2 = 4$. Cada una de estas funciones f_n son claramente biyectivas, con esto $|C_1| = |C_2| = ... = |C_n| = |\mathbb{N}|$ es numerable. Luego $C = C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_n$ es numerable por ser la unión numerable de conjuntos numerables.

(b) Vamos a dividir o "particionar" A en una colección infinita (numerable) de conjuntos, luego probaremos que cada uno de ellos es numerable, primero fijamos i y con esto tenemos los siguientes subconjuntos.

$$A = \begin{cases} A_1 = & \left\{x \in \mathbb{R} / \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{k}{3}\right\} = \left\{..., \frac{-2}{3}\frac{-1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, ...\right\} \\ A_2 = & \left\{x \in \mathbb{R} / \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{k}{3^2}\right\} = \left\{..., \frac{-2}{9}\frac{-1}{9}, 0, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, ...\right\} \\ \vdots & \\ A_n = & \left\{x \in \mathbb{R} / \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{k}{3^n}\right\} = \left\{..., \frac{-2}{3^n}\frac{-1}{3^n}, 0, \frac{1}{3^n}, \frac{2}{3^n}, ...\right\} \end{cases}$$

Para cada A_n podemos establecer la siguiente función $f_n : A_n \to \mathbb{Z}$ $f(x) = k$, por ejemplo, para $A_1 : f\left(\frac{1}{3}\right) = 1, f\left(\frac{2}{3}\right) = 2, f\left(\frac{-1}{3}\right) = -1$. Cada una de estas funciones f_n son claramente biyectivas, con esto $|A_1| = |A_2| = ... = |A_n| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$ es numerable.

Luego $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ es numerable por ser la unión numerable de conjuntos numerables.

(c) Si una recta no vertical pasa por (0,1) y corta al eje OX en coordenada racional $(q, 0)$, entonces es de la forma $l : y = \frac{-x}{q} + 1$, con $q \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$. Si llamamos L al conjunto de todas estas rectas, entonces se puede describir de la siguiente manera $L : \left\{y = \frac{-x}{q} + 1/q \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}\right\}$. Podemos entonces establecer la siguiente función $f : L \to \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ $f(l_1) = q$, es decir, que a cada recta le asocio la coordenada x del punto que corta al eje OX (vendría siendo q). Es inyectiva ya que las rectas en este conjunto se diferencian justamente por el punto de corte en el eje OX (si dos rectas tienen distinto q, son distintas entre si), además es sobreyectiva ya que para cada $q \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ basta tomar la recta que corte en el eje OX en el punto $(q, 0)$. Como es biyectiva se concluye que $|L| = |\mathbb{Q}\backslash\{0\}| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$ y, por lo tanto, es numerable.

(d) Las recta no vertical que no pasa por el origen y corta los ejes en coordenadas racionales es de la forma $y = \frac{-p}{q}(x - q)$ con $p, q \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$. Si llamamos L al conjunto de todas estas rectas, entonces se puede describir de la siguiente manera L : $\left\{y = \frac{-p}{q}(x - q)/p, q \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}\right\}$. Luego podemos hacer la siguiente división del conjunto L, fijando p

$$L = \begin{cases} L_1 = & \left\{y = \frac{-1}{q}(x-q)/q \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}\right\} \\ L_2 = & \left\{y = \frac{-2}{q}(x-q)/q \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}\right\} \\ \vdots & \\ L_p = & \left\{y = \frac{-p}{q}(x-q)/q \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}\right\} \end{cases}$$

Por la parte (a) se sabe que $L_1, L_2, ..., L_n$ son numerables, luego $L = L_1 \cup L_2 \cup ... \cup L_n$ es numerable por ser la unión numerable de conjuntos numerables.

(e) Vamos a dividir o "particionar" A en una colección infinita (numerable) de conjuntos, primero fijamos i y con esto tenemos los siguientes subconjuntos.

$$A = \begin{cases} A_1 = & \left\{\frac{p}{2} \mid p \in \mathbb{N} \wedge p < 2\right\} = \left\{\frac{1}{2}\right\} \\ A_2 = & \left\{\frac{p}{2^2} \mid p \in \mathbb{N} \wedge p < 2^2\right\} = \left\{\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right\} \\ \vdots & \\ A_n = & \left\{\frac{p}{2^n} \mid p \in \mathbb{N} \wedge p < 2^n\right\} = \left\{\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \frac{3}{2^n}, ...\right\} \end{cases}$$

Notar que cada uno de estos conjuntos es finito y no vacío, luego utilizando la indicación A es numerable por ser unión numerable de conjuntos finitos no vacíos.

(f) Primero notemos que E contiene todas las tuplas con una cantidad par de componentes, dichas cantidades pueden ser solamente 1 o -1, y su suma da 0, es decir, el conjunto es de la forma:

$$E = \{(1, -1), (-1, 1), (1, -1, 1, -1), (1, 1, -1, -1), ...\}$$

Para demostrar que es infinito basta ver que para cada natural tomamos una tupla, en efecto

$$E = \begin{cases} n=1 & \text{tomamos } a=(-1,1), a\in\{-1,1\}^2 \\ n=2 & \text{tomamos } a=(-1,1,1,-1), a\in\{-1,1\}^4 \\ \vdots & \\ n=n & \text{tomamos } a=(-1,1,...,-1,1), a\in\{-1,1\}^{2n} \end{cases}$$

Luego para cada natural existe un elemento en E, se concluye que es infinito. El conjunto E se puede ver como la unión de los siguientes conjuntos.

$$E = \begin{cases} E_1 = \{a=(a_1,a_2), a\in\{-1,1\}^2, \sum_{k=1}^{2} a_k = 0\} \\ E_2 = \{a=(a_1,a_2,a_3,a_4), a\in\{-1,1\}^4, \sum_{k=1}^{4} a_k = 0\} \\ \vdots \\ E_n = \{a=(a_1,...,a_n), a\in\{-1,1\}^{2n}, \sum_{k=1}^{n} a_k = 0\} \end{cases}$$

Notemos que cada E_n es finito, por ejemplo $E_1 = \{(-1,1),(1,-1)\}$, $|E_1| = 2$, por lo tanto E es una unión de finitos ($|E| \leq |\mathbb{N}|$). De lo visto anteriormente se tiene que $|\mathbb{N}| \leq |E|$, con lo que juntando ambas expresiones se deduce que E es numerable. Otra forma de ver esto es haciendo la siguiente biyección que asocia un natural con cada tupla de E.

$$\begin{aligned} 1 &\to (-1,1) \\ 2 &\to (1,-1) \\ 3 &\to (1,-1,1,-1) \\ 4 &\to (1,-1,-1,1) \\ &\vdots \end{aligned}$$

(g) Notemos que como $x_2, x_3 \in \mathbb{N}$, necesariamente $x_1 \in \mathbb{Z}$, esto porque la suma de los tres debe dar un número natural, entonces E puede ser descrito como el siguiente conjunto $E = \{x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^2 / \exists n \in \mathbb{N}, x_1+x_2+x_3 = n\}$, se deduce que $E \subseteq \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^2 \Rightarrow |E| \leq |\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$, además si fijamos x_1, x_2, digamos en 0, existirá una tupla $(0,0,n)$ para cada natural n, con lo cual podemos deducir que el conjunto es infinito ($|\mathbb{N}| \leq |E|$), juntando ambas desigualdades se tiene que $|E| = |\mathbb{N}|$.